

中国科学技术大学

博士学位论文



增材制造中的结构与路径规划问题

作者姓名： 翟晓雅

学科专业： 计算数学

导师姓名： 陈发来教授 吴俊助理教授

完成时间： 二〇二一年五月二十日

University of Science and Technology of China
A dissertation for doctor's degree



Structural Design and Path Planning in Additive Manufacturing

Author: Xiaoya Zhai

Speciality: Computational Mathematics

Supervisors: Prof. Falai Chen , Dr. Jun Wu

Finished time: May 20, 2021

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所提交的学位论文，是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名：_____

签字日期：_____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一，学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权，即：学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅，可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

公开 保密 (____ 年)

作者签名：_____

导师签名：_____

签字日期：_____

签字日期：_____

摘 要

增材制造作为一种新的制造技术在过去十年来得到了快速发展，并在工业制造、航空航天、医疗等领域得到大量的应用。与此同时，增材制造进一步促进了结构设计技术的发展。结构设计为增材制造技术的实体打印提供了更多多样性的输入。结构设计解决的是打印什么的问题，增材制造技术解决的是如何打印的问题。两者相辅相成，互相促进，是工业生产中至关重要的两个环节。本文将围绕增材制造中的结构优化设计问题以及路径规划问题进行研究。

结构设计领域中的优化问题多种多样，本文围绕着带有应力约束的拓扑优化问题以及可微的微结构设计两个方面进行探索。带有应力约束的结构优化问题是结构设计领域中非常重要的一个分支，几十年来得到了迅速的发展，但它仍然没有高效的求解算法，其主要原因在于该类问题的三大难点：局部性，奇异性和高度非线性。在第三章中，本文提出一种基于增广拉格朗日乘子函数的交替方向选择算法求解带有应力约束的拓扑优化问题。求解模型有两组设计变量，单元应力和单元密度。本文算法引入单元应力作为设计变量，并对模型施加应力计算的等式约束，然后利用增广拉格朗日方法将等式约束作为软约束放在目标函数中，对应力变量和密度变量交替优化。在数值求解阶段，我们利用有限元分析和等几何分析工具分别进行求解。数值算例验证了本文算法针对两种求解工具的有效性。

具有周期性微结构的设计是结构设计领域中的一个基本问题。周期性微结构与近几年受到广泛关注的功能性梯度材料设计密切相关。功能性梯度材料是在随着体积变化的过程中，其物理性质呈现梯度变化。在第四章中，本文在功能性梯度材料的基础上提出“可微的微结构”的概念。所谓可微的微结构是指其由连续的参数控制，体积与物理性质都是连续变化的并且要求其物理性质(如：弹性模量，泊松比)尽可能接近 Hashin-Shtrikman 上限。本文的基本思想是，通过一组参数构造一个物理场，该物理场的每个截面对应着一个微结构。如果该物理场是连续的，那么产生的微结构的体积是连续的，且自然满足连接性条件。为设计力学性能最优的微结构，本文以传热系数为自变量，选取关键微结构的物理性质的总和为目标函数，通过求解热传导方程来求解物理场(温度场)。数值实验验证了本文算法的有效性与鲁棒性。

结构设计为增材制造的输入提供了多样化的选择。当有了增材制造的模型输入之后，如何对其进行高效的打印是备受关注的的问题。本文第五章将围绕打印路径规划的优化算法进行深入研究。目前大多数路径填充算法对于切片的复杂度没有过多的讨论。然而复杂结构在自然界中很常见，例如骨骼、软木、蜂巢、

珊瑚等。对于切片复杂的模型，传统的填充路径就会出现不连续，打印效率低下等问题。本文针对复杂结构的路径规划问题进行研究，并将复杂模型划分为边界复杂的模型和拓扑复杂的模型。本文采用“分而治之”的思想，首先将复杂的模型简化，再通过对简单区域进行路径规划然后进行全局连接达到路径填充的目的。我们将本文算法与传统的路径规划方法 (Zigzag 填充路径，轮廓平行填充路径和全局连续的费马螺线填充路径) 在以下几个主要指标：打印成本 (时间，材料)，路径分割数，急转弯比例，填充比例及视觉效果等进行了比较。实验结果表明，本文算法在材料成本、打印时间和结构稳定性等方面均优于其他方法。

关键词：增材制造；结构设计；带有应力约束的拓扑优化；可微的微结构设计；
路径规划算法

ABSTRACT

Additive manufacturing has been applied in various fields such as industry, aerospace, biomedical engineering and so on. At the same time, structural design has also been vigorously developed. The widespread attention to structural design also provides more diverse inputs for additive manufacturing (3D printing). Structural design answers the question what to print, and additive manufacturing solves the problem how to print. These two technologies complement and promote each other, which are two vital parts in industrial production. This dissertation will focus on the structural optimization and path planning methods in additive manufacturing.

There are many optimization problems in the field of structural design and this dissertation focuses on stress-based topology optimization and the design of differentiable microstructures. Topology optimization with stress constraints is a very important branch in the field of structural design, which gains fast developed in recent decades. However, there is no unified solution algorithm, which is mainly due to the three major difficulties: locality, singularity and high non-linearity. In chapter 3, the alternating direction method of multipliers based on the Lagrange multiplier method is proposed. The optimization model has two sets of design variables, that are the stress and density of elements. The algorithm introduces stress as a design variable and imposes an equal constraint on the model of stress calculation. The equal constraint is then placed as a soft constraint in the objective function using the augmented Lagrange method, and the corresponding stress and density variable are optimized alternately. The method is solved separately using finite element analysis and isogeometric analysis tools. Numerical examples demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm on two numerical solutions.

The design of periodic microstructures is a basic problem in the field of structural design. In recent years, functionally graded materials(FGMs) whose the physical properties show gradient changes with the increasing of volume have become a hot topic. In this dissertation, the concept of "differentiable microstructure" is put forward based on FGMs. Differentiable microstructure is controlled by continuous parameters, its volume and physical properties are continuously changing with these parameters, and its physical properties (such as elastic tensor, Poisson's ratio) are required to be as close as possible to the upper limit of Hashin–Shtrikman curve. The basic idea of this dissertation is to construct a physical field through parameters, and each cross section of the

physical field corresponds to one microstructure. If the physical field is continuous, the volume is continuous and naturally satisfies the requirement of connectivity. In order to design the microstructure with optimal mechanical properties, this dissertation takes the heat conductivity as design variables and the sum of the physical properties of the key microstructure as the objective function. After that, we could obtain the physical field (temperature field) by solving the heat conduction equation. Numerical experiments demonstrate the effectiveness and robustness of the proposed algorithm.

Structural design provides a variety of options for additive manufacturing inputs. When the inputs of additive manufacturing are available, Printing efficiency is a problem worthy of attention. Here, we focus on the path planning problem. At present, there is a lack of complexity domains in most path planning algorithms. The generated paths are universal. However, complex structures are common in nature, such as bones, corals, hives, corals, etc. For the model with complex slices, the existing filling path will appear discontinuous and low efficiency. In this dissertation, the path planning problem of complex structures is studied, and the complex models are divided into complex boundary models and complex topology models. The idea of "divide and conquer" is adopted for path planning. Firstly, the complex model is simplified, and the purpose of path filling is achieved through path filling for simple areas and then global connection. The path is measured by printing cost (time, material), path segmentation, sharp turn ratios, infill ratios, and visual effect. The proposed algorithm is compared with the traditional path planning methods (Zigzag path, contour parallel path and global continuous Fermat spiral path). Experimental results show that the proposed algorithm is superior to other methods in material cost, printing time and structural stability.

Key Words: Additive manufacturing; Structural design; Stress-based topology optimization; Differentiable microstructure design; Path planning algorithm

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 增材制造	2
1.1.1 研究背景及意义	2
1.1.2 研究进展	3
1.2 结构设计	8
1.2.1 研究背景及意义	8
1.2.2 研究进展	9
1.3 本文结构安排	17
第 2 章 基础知识	18
2.1 弹性力学的基础知识	18
2.1.1 基本概念	18
2.1.2 基本方程	18
2.2 弹性力学数值处理方法	21
2.2.1 有限元分析方法	21
2.2.2 等几何分析方法	22
2.3 拓扑优化算法	25
2.3.1 均匀化理论	25
2.3.2 变密度法理论	27
2.3.3 正则化处理	28
第 3 章 带有应力约束的拓扑优化问题	31
3.1 引言	31
3.2 应力约束问题的挑战	31
3.3 基于有限元的带有应力约束的拓扑优化问题	33
3.3.1 模型建立	34
3.3.2 灵敏度分析	36
3.3.3 结果分析与讨论	38
3.4 基于等几何分析的带有应力约束的拓扑优化问题	45
3.4.1 模型建立	46
3.4.2 灵敏度分析	49
3.4.3 结果分析与讨论	50
3.5 基于有限元与等几何分析的拓扑优化计算比较	52

3.6 本章小结	54
第 4 章 可微的微结构设计	55
4.1 引言	55
4.2 算法描述	56
4.3 灵敏度分析	59
4.4 结果分析与讨论	60
4.4.1 评价方法	60
4.4.2 算法比较	60
4.4.3 算法参数讨论	63
4.5 本章小结	68
第 5 章 增材制造领域中的路径规划问题	69
5.1 引言	69
5.2 边界复杂模型的打印路径规划	71
5.2.1 算法描述	71
5.2.2 结果分析与讨论	75
5.3 拓扑复杂模型的打印路径规划	79
5.3.1 算法描述	79
5.3.2 结果分析与讨论	83
5.4 本章小结	89
第 6 章 总结和展望	92
6.1 本文工作总结	92
6.2 未来工作展望	93
参考文献	95
致谢	105
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果	107

第1章 绪 论

近几年来增材制造技术(又称 3D 打印技术)得到了长足的发展并应用在各行各业。增材制造融合了计算机辅助设计等技术,它的基本思想是将专用的打印材料进行逐层堆积,制造出实体物品。增材制造技术相比于传统的减材制造更加节省材料也使得造型更加的多样化。随着增材制造技术的成熟,人们发现“设计”成了制约制造的瓶颈。“设计”的目的为美观且实用,需要造型设计师与结构工程师的协同合作。结构设计是基于制造业驱动而迅速发展起来的。之后学者将结构优化方法引入设计领域,并率先在工业设计,珠宝设计和建筑设计等领域展开应用。本章的第一部分从增材制造的背景及意义出发,首先阐述增材制造技术的分类及其研究背景和意义,其次总结了增材制造的几何优化算法。第二部分阐述结构设计中的优化问题,并介绍结构设计的分类方法及研究进展。需要说明的是结构设计的目的是为了实体制造,所以在本文中我们称结构设计问题是增材制造驱动的。

结构与增材制造是相辅相成的关系。在设计阶段,满足用户需求且便于实体制造是结构优化的目标。在成型阶段,结构优化设计的结果可以作为增材制造的输入,增材制造技术是连接结构模型与实体的桥梁。增材制造技术将复杂结构的实体化成为可能。将结构优化设计与增材制造技术结合以提升打印效率节约成本,可以取得更大的应用空间及经济效益。本章的结构如下图所示:

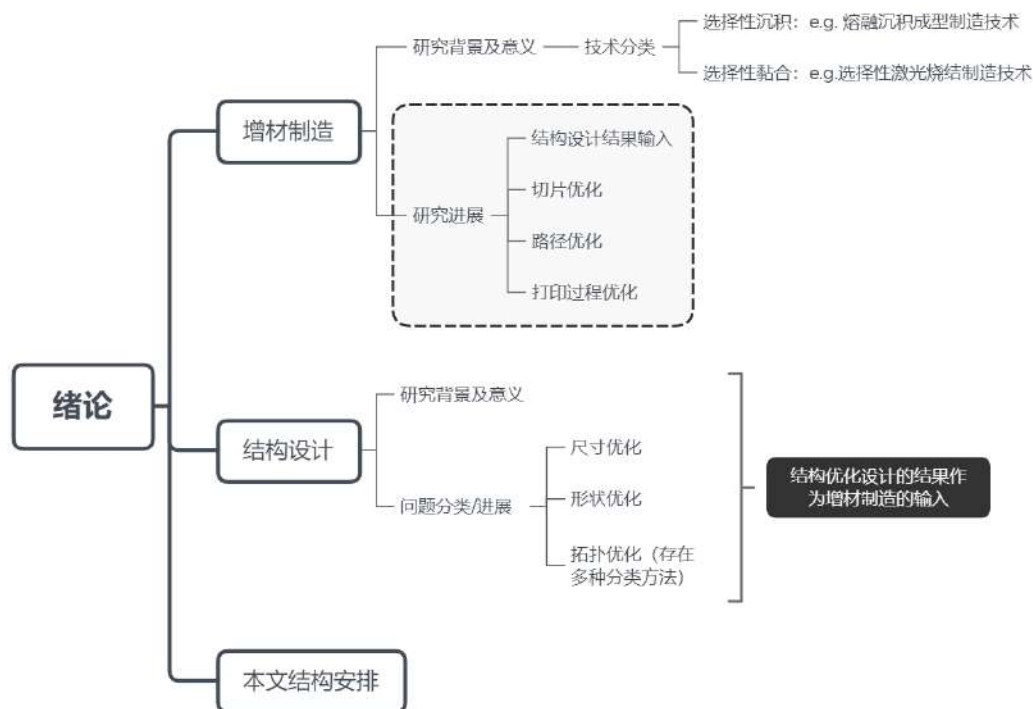


图 1.1 绪论结构安排。

1.1 增材制造

增材制造技术起源于上个世纪八十年代，它是一种利用数字文件生成三维实体的技术。增材制造技术通过材料的层层叠加形成最终的实体模型。每一层可以看作是模型的一个横截面，每层的厚度决定了打印的精度，当层的厚度越小，打印的精度就越高。打印出来的实体就越与数字模型接近。本节首先介绍了增材制造的分类方法与流程。本文依据制造的打印过程将其划分为模型输入，模型格式转换，切片计算，路径规划和实体打印。本章从整体上来讲增材制造技术的几何优化问题的研究现状与进展。论文第五章详细介绍增材制造领域中的路径规划问题的现状与研究进展。

1.1.1 研究背景及意义

增材制造是自下而上逐层累加的技术，是实现大规模生产及个性化定制的一个重要手段。传统的减材制造工艺是从原材料开始，通过切割，钻，铣削等机械工艺最后获得实体。相比与减材制造，增材制造技术丰富了模型的多样性。有些零部件形状复杂、制备周期长，应用传统铸造锻造工艺生产不出来或损耗较大。而增材制造技术则可以快速制造出满足要求的零部件，并具有加工周期短、制造成本低、无需模具等优势。下图1.2(a)(b)表示了增材制造与减材制造的对比曲线图。图1.2(a)表示了生产规模与每件产品成本之间的曲线。当生产的规模逐渐增大时，传统制造技术的成本逐渐降低而增材制造技术的成本一直保持不变。所以增材制造技术在个性化定制领域炙手可热，而减材制造技术在大规模生产时应用较广。图1.2(b)表示当模型制造越复杂，传统制造技术所产生的每件产品成本就越高，而对于增材制造技术来说成本保持不变。Conner 等人^[1]绘制了图1.2(c)。其中 x, y, z 三个轴表示三个属性即：模型复杂度，模型规模，定制化服务。8个顶点描述了我们所需制造的任何产品，比如顶点③表示模型复杂度高，量产规模大的产品，顶点⑦表示模型复杂度高，生产规模大，个性化定制高的产品。

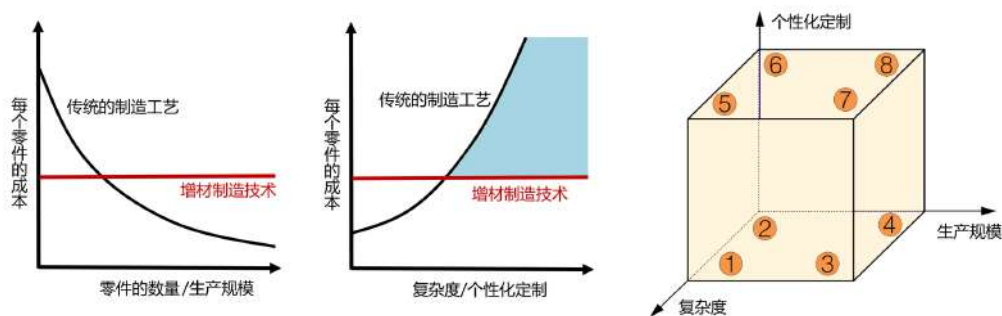


图 1.2 (a)(b) 增材制造与减材制造对比曲线。(c) 制造产品的三维模型。

增材制造技术按照不同的划分原则可分为多个种类。胡迪等人^[2]按照材料结合的方式将增材制造技术分为两类：①选择性沉积型，如熔融沉积成型制造技术等；②选择性黏合型，如选择性激光烧结制造技术等。吴怀宇等人^[3]依据材料形式和工艺实现方法将其分为五大类：①粉末或丝状材料高能束烧结、熔化成型；②丝材挤出热熔成型；③液态树脂光固化成型；④液体喷印成型；⑤片/板/块粘接或焊接成型；根据不同的生产需求，利用不同的加工形式。本文简单介绍三种常用的增材制造技术：

(1) 熔融沉积成型制造技术

熔融沉积成型制造技术 (Fused Deposition Modeling, FDM) 是将丝状的热熔性材料加热融化，同时三维喷头在计算机的控制下，根据截面轮廓信息，将材料选择性地涂敷在工作台上，快速冷却后形成一层截面。FDM 的材料一般为热塑性材料如：尼龙，PLA，ABS 等。FDM 所用材料比较廉价，不会产生毒气和存在化学污染的危险。但是 FDM 打印成形后表面粗糙，需后续抛光处理。最高精度只能为 0.1mm。它是常见的增材制造技术，具有易于操作，低成本等特点。

(2) 选择性激光烧结制造技术

选择性激光烧结制造技术 (Selective Laser Sintering, SLS) 是事先在工作台上铺上一层粉末，然后激光按照软件生成的轮廓生成固定的路径对粉末进行烧结，烧结的粉末层层堆积成型。SLS 的材料有很多如：金属和陶瓷粉末等。该技术无需添加支撑结构因为未被烧结的粉末自动成为烧结部分的支撑。但是 SLS 产生的模型结构存在疏松多孔，易变形的缺点。在制造的过程中会产生有毒气体或粉尘。

(3) 光固化成型制造技术

光固化成型制造技术 (Stereo Lithography Appearance, SLA) 采用特定波长与强度的激光聚焦在光固化材料上，使其凝固，然后升降台在垂直方向移动一个层面的高度从而固化另外一层，就这样层层堆积得到最后的三维模型。SLA 采用液态光敏树脂为材料。其精度高经过多年的研究改进可达 16 微米，表面成型效果好。但是同 FDM 一样需要支撑结构。除此之外，其材料高昂，零件强度低。

增材制造技术发展至今仅仅四十年的时间，它改变了传统的制造方式，为复杂结构的制造提供了新思路，对于制造业而言有着广阔的应用前景，目前已经涉及到航空航天，医学，建筑等各个领域。图 1.3展示了增材制造产品的应用。

1.1.2 研究进展

增材制造技术的打印流程主要包括五个主要步骤：①3D 模型生成；②数据格式转换；③切片计算；④打印路径规划；⑤实体打印。3D 模型主要由一些建模软件或通过 3D 扫描仪得到点云数据经过重建后得到。其次将模型转化为增材



图 1.3 增材制造应用：防疫面罩生产/3D 打印鞋子/玩具/蛋糕/珠宝。

制造技术所要求的数据格式，通常为 STL 文件。STL 文件是将三角面片作为描述模型的基本单位。所有的模型的表面都可以由若干个三角片进行逼近。3D 模型转化为 STL 文件之后，就可以输入到通用的打印软件中进行切片计算和路径规划这两个前处理操作。由于增材制造技术是由下而上的层层堆叠技术，切片计算将三维模型切割成若干二维截面的组合，路径规划则是在二维截面上进行填充的操作。经过这两个步骤之后将最后的前处理结果转化为 G-code 文件，输入 3D 打印机中进行实体打印。最后进行支撑物去除等后处理操作。

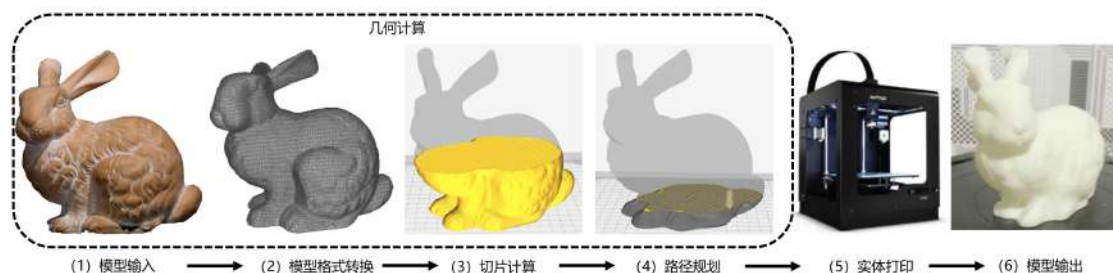


图 1.4 增材制造中优化问题的划分原则。

经过上述增材制造的打印流程的介绍可以总结出增材制造主要存在两类问题：打印什么的问题 (what to print) 和怎么打印的问题 (how to print)。打印什么的问题主要是指增材制造的模型输入问题。怎么打印的问题主要是指切片计算，路径规划和实体打印过程的优化问题 (如：多轴打印问题，打印的时间序列优化问题等)。本文第五章重点研究复杂模型的路径规划算法。故在此重点介绍路径优化的相关研究进展，其次对面向增材制造的结构设计 (打印模型的优化)，切片计算和实体打印优化等增材制造中几何处理问题进行简要介绍。

(1) 面向增材制造的结构设计

为了保证增材制造过程的高效进行，需要对 3D 模型进行一系列的约束限制比如尽可能的减少支撑材料的同时提升打印过程的空间利用率，打印尺寸约束

等等^[4]。本文将面向增材制造的结构设计主要分为以下四类：

- 打印方向设计

不同的打印方向对模型的成型起着非常重要的作用^[5-7]。比如‘T’字型，沿着不同方向打印，支撑结构会产生巨大变化。打印方向的优化一般可视为支撑结构优化的预处理。

- 支撑结构设计

支撑结构设计问题通常以节约打印时间和减少支撑材料为目的。Jiang 等人^[8]总结了增材制造的支撑结构的设计，如树状结构^[9-10]，节省空间的树枝状支撑结构^[11]，桥状结构^[12]，‘Y’ / ‘IY’ 结构^[13] 等。一些学者提出了自支撑的结构与曲面设计^[14-16]，从根源上避免了由支撑结构的产生而造成的材料浪费。

- 物体分割问题

为了解决打印模型大，打印平台小的问题，操作者需要对大尺寸模型进行有效分割^[17-18]。在分割的过程中既要求保证模型的美观，又要求分割结构是彼此可连接的且每一部分小于打印平台尺寸。徐文鹏等人^[19]将物体分割问题的约束目标总结为：①尺寸可打印性；②可组装性；③分割数量尽量少；④可连接性；⑤结构合理性；⑥美观；

- 机构设计

机构式结构分为静态机构式结构和动态式机构。它在日常生活中普遍存在比如：积块式机构(鲁班锁构件, 联锁构件)^[20-21]，玩具机构^[22-23]，关节机构^[24-25]和免组装机机构^[26]。近几年利用 3D 打印技术生产机构式结构更加普遍，机构设计的相关工作也越来越多。

面向增材制造的结构设计可以有效解决打印什么的问题。图1.5给出了面向增材制造的结构优化案例。

(2) 切片优化

增材制造技术又称分层制造技术。“分层”就是切片计算的过程，其实质就是无限逼近输入的三维模型。在切片过程中存在切片厚度和切片方向两个参数。如果两个参数设定不当就会产生阶梯效应使得逼近的结果存在一定的误差并且会影响模型的表面的精度。Felix 等人^[27]综合分析了切片算法对 3D 模型的影响。对于细节复杂的模型，切片厚度越大精度越低，逼近的误差也就越大。切片的厚度越小，逼近的也就越好。目前常用的 3D 打印模型输入主要有两类：CAD 模型和 STL 模型，其中 STL 模型是使用范围最广泛的标准文本格式。STL 文件高效地适应了多数 CAD 软件的性能要求。本文对三维模型的切片分层和路径规划都是基于 STL 模型进行讨论。

对于切片过程而言，STL 模型的切片问题转化为切片横截面与模型的三角

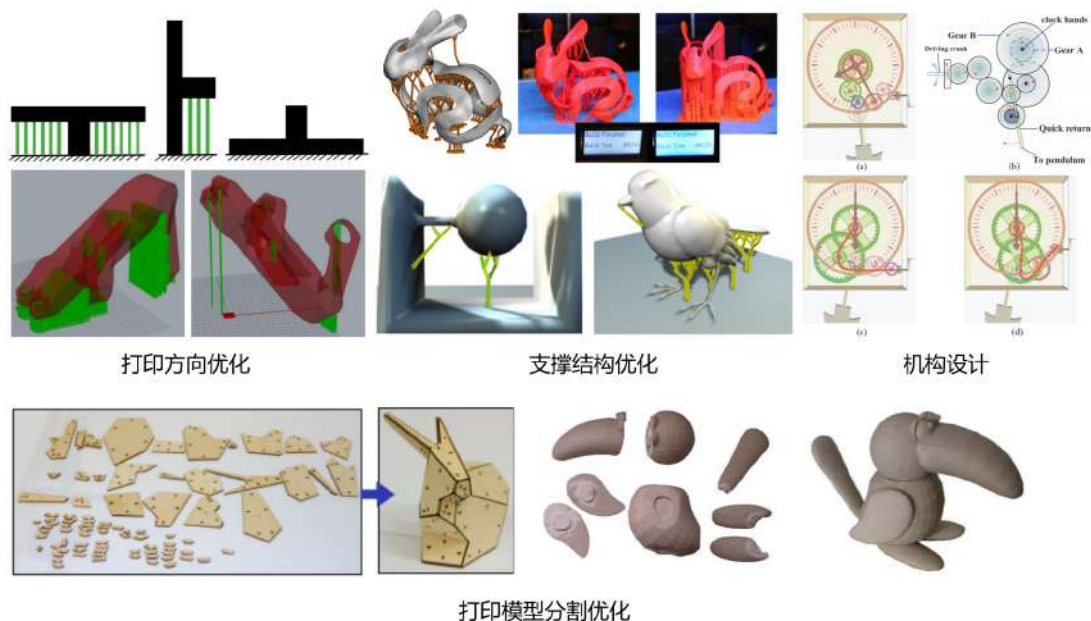


图 1.5 面向增材制造的结构优化设计。

面片的相交问题。本文介绍如下图所示的五种可能相交的情况：①三角面片上的一个顶点在切平面上，另外两个顶点在切平面的一侧；②三角面片上的两个顶点在切平面上；③三角面片上一个顶点在切平面上，另外两个顶点在切平面的两侧；④切平面与三角面片无交点；⑤切平面与三角面片相交于两个边；切片的过程就是求解交点从而获取交线段，然后将所有的交线段首尾相连形成有向的封闭轮廓线的过程。该轮廓线所包围的闭平面为当前层的切片。

目前切片算法主要有：自适应层高的切片算法，基于几何特征的分层算法和基于模型几何连续性的分层算法。Siraskar 等人^[28] 为了提升切片处理时间，提出自适应层高的切片算法。Wang 等人^[29] 为了保证模型的精度，首先将模型划分为若干区域，在每个区域内部产生切片信息。该方法在保证相同的视觉效果的前提下，相比于传统的切片算法节省了 30%-40% 的时间。为了保证高效的计算效率，通常商用软件中封装的是均匀切片算法。

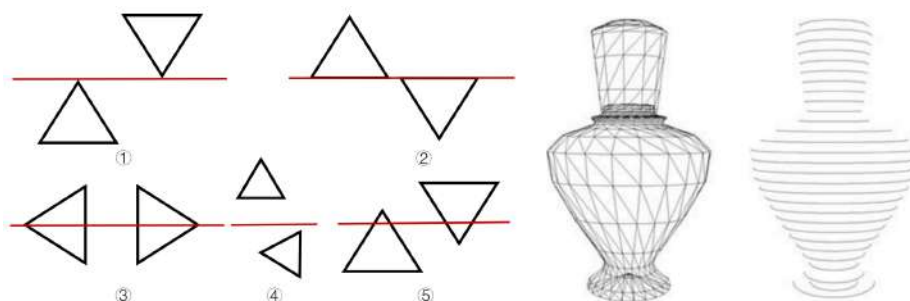


图 1.6 分层原理与切片示例。(左) 切片横截面与三角面片相交的五种情况；(右) STL 模型与其平行切线；

(3) 路径优化

路径规划是增材制造的一个重要环节。目前，常用的路径规划方法有四种：Zigzag(锯齿形/之字形) 填充路径^[30]，轮廓平行填充路径^[31]，迷宫曲线填充路径^[32]和空间曲线填充路径^[33]。Zigzag 填充路径(图1.7(a))和轮廓平行填充路径(图1.7(b))是目前最常用的两种路径填充曲线。它们都是平行填充路径算法一个关于某一方向平行，一个关于轮廓边界平行。Zigzag 填充路径计算效率高，但是存在很多拐角不利于切片轮廓的快速填充。轮廓平行填充路径可以有效保证切片边界的几何精度，但往往会产生大量不连续的小碎片。迷宫图案(图1.7(c))也可以用作填充路径，但为任意边界设计迷宫图案是一项艰巨的任务。空间曲线填充路径如 Hilbert 填充路径(图1.7(d))和螺旋填充路径(图1.7(e)和图1.7(f))可以实现全局连续性，但计算效率较低。

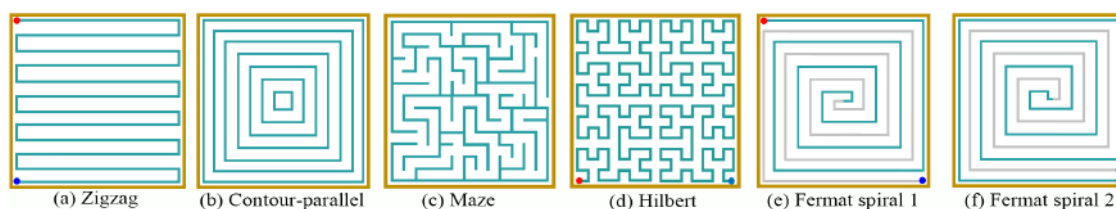


图 1.7 基本填充路径。

增材制造技术的路径填充曲线目前没有统一的评价体系。在此，本文总结如下五个评价指标，并将其作为衡量本文填充路径优劣的标准。首先，路径要求全局连续。如果路径不是全局连续的，打印材料将会在不连续的地方断开，打印机的喷嘴会经历上升、快速定位和下降的过程，增加了打印时间，影响整体打印质量。其次，填充路径应该尽量避免急转弯现象。急转弯会减慢喷嘴的打印速度，造成时间浪费，并且相邻路径之间产生间隙造成填充不均匀的现象。第三，路径填充要尽可能的均匀。填充率过大增加材料成本，填充率不足影响打印质量。最后两个指标是打印时间和打印材料成本。在一定的填充率下，这些因素应尽可能小。另外，打印的视觉效果是这五个因素的综合体现。

(4) 其他优化问题

除了上述优化问题，增材制造领域还存在机器人辅助 3D 打印的优化问题^[34-36]，打印的时间序列优化问题^[37]等等。将机器人技术与增材制造技术结合从根本上改变了产品的制造方式。多轴机器人的制造方法被广泛用于焊接，拾取和放置等任务当中，更好地提高了生产效率，保证了重复性任务的安全性和可靠性，降低了劳动力成本。多轴机器人系统和增材制造技术的组合为多轴增材制造和在不同制造环境中制造复杂几何形状提供了可能性。Wu 等人^[35]提出了一种多方向的 3D 打印的通用模型生成方法，该方法通过沿不同方向打印不同的模型区域来实现。Huang 等人^[38]输入一个物理上自支撑的框架形状，它本身处

于稳定的平衡状态。他们的目标是在所有的制造阶段生成一个有效的打印支撑序列并且要求机器人制造系统的移动部分不会与已经打印出来的零件发生碰撞,这样打印出来的零件就会处于稳定的平衡状态。Wang 等人^[37]同时优化结构和制造顺序,所提出的空间和时间优化模型同时考虑中间结构自重和临界载荷。该方法为拓扑优化与增材制造技术的集成开辟了一个新的研究方向。

1.2 结构设计

1.2.1 研究背景及意义

传统的结构设计的工作流程都是先通过设计师按照经验设计出实体,其次应用在实际项目中,然后按照需求不断的调整进而得到最后的结构。这样的设计流程,对设计师的要求很高。一方面要求其有大量的专业知识,另一方面还要有丰富的实际设计的经验。设计出来的结构虽然满足美观等一系列的要求,但是在实际应用中很难经受住考验。比如应力集中等问题依然无法避免。这样的过程以频繁的调整为主,不仅消耗了大量的时间成本,同时也会造成材料的浪费。为了避免由于结构性能的缺失而造成的反复调整,工程师的加入成为设计中的重要一环。改进的设计流程首先由设计师进行结构设计,然后交付工程师进行性能测试。两者协同设计反复调整得到最后的方案。虽然相比于传统设计师主导的设计,材料的浪费和时间成本的消耗大大降低,但是问题仍然没有得到根本的解决。协同设计依靠反复调整,依然存在效率低下等问题。因此,改变传统的设计流程减少时间和材料的浪费成为亟待解决的问题。

为了提升设计效率与节约成本,结构设计应运而生。结构设计是在19世纪60年代初发展起来的一门新兴学科。在1988年,Bendsøe和Kikuchi^[39]将优化思想引入结构设计领域,开启了结构优化领域的大门。结构优化是指在给定约束条件下,按某种目标(如重量最轻、成本最低、刚度最大等)求出最好的设计方案,曾称为结构最佳设计或结构最优设计。它是结构与其他领域(建筑,风电等)交叉产生的一个新兴研究方向。将结构优化算法封装在设计软件中,设计师可以通过软件进行性能测试大大提升了结构在概念设计阶段的效率。近年来随着计算机辅助几何技术和增材制造蓬勃发展,多样化的实体供不应求,进一步促进了结构设计的飞速发展。结构优化设计有广泛的应用前景和巨大的商业价值,故其具有普遍而深刻的现实意义。图1.8展示了结构优化设计在实际生活中的应用。

(1) 建筑领域

在建筑设计中,一些建筑师对与结构的专业认识不够清晰,设计从美学出发力求构建建筑的形态美,最后的设计方案对于结构工程师来说是一个巨大的挑

战。结构工程师需要从实际出发考虑各种荷载和受力情况，分析设计方案是否满足实际条件。结构优化能够促进建筑师和结构工程师的协同工作，设计出兼具建筑美学又符合结构性能的创新性的建筑形态(见1.8卡塔尔国际会议中心)。

(2) 医疗领域

医学植入体，类似人工骨，是非常明确的高度个性化的产品。因为钛合金的生物相容性，它是完美的植入体的材料。但问题在于钛的刚度是股骨皮质骨的6.5倍，当一个钛合金的植入体被植入到患者体内，自然骨骼的载荷分配发生了改变(自然骨受到的载荷变小了)产生了应力遮挡。因此，在微结构层面设计一个植入体尽可能接近原始的材料是自然分配这些载荷的关键。目前，将结构优化技术与医学交叉结合的研究层出不穷(见1.8骨结构的优化仿真)。

(3) 航空航天领域

高速飞行器是航空、航天领域发展的重要方向，具有重大战略意义和经济价值。未来几年到几十年，武器装备、飞机、往返飞行器等航空航天装备面临着全面更新换代，而高速化是其重要趋势。这样的要求需要结合结构优化以减重为目标从而实现轻量化飞行。结构优化方法作为创新设计手段，在高速飞行器结构设计应用探索中已经展现出巨大的能力与潜力(见1.8个性化原件设计)。



图 1.8 结构优化技术的应用。卡塔尔国际会议中心/骨结构优化仿真/工程元件设计/个性化椅子设计/轻量化摩托车造型。

1.2.2 研究进展

本小节首先介绍结构优化的分类，其次从三方面(离散体结构优化，连续体结构优化和微结构拓扑优化)介绍拓扑优化的研究进展。结构优化设计是一个非常广的概念，它将最优化理论应用在工程设计领域，使人们在解决工程问题时，从无数设计方案中找到最接近目标的方案，从而大大提高了工程设计的效率和

质量。

结构优化设计有很多种分类方法。按照优化的对象，结构优化可以分为拓扑优化，形状优化和尺寸优化。拓扑优化是结构优化设计的初始设计阶段。它首先给定负载情况、约束条件和性能指标，在指定的区域内对材料的分布进行优化。由于在优化的过程中会改变结构的拓扑，所以称为拓扑优化。简而言之，拓扑优化是一种材料最优化布局的方法。形状优化是在不改变拓扑的情况下对模型的边界形态进行优化。尺寸优化是在设计的最后阶段的细节调整。按照优化对象的连续性，结构优化可以分为离散体结构优化和连续体结构优化。离散体结构优化的优化对象一般为杆状结构或者桁架结构，连续体结构优化通常其设计域是一个 2D/3D 的区域。按照优化的目标，结构优化又可以分为质量结构优化，柔度优化与应力优化。按照优化对象的设计尺寸，结构优化可以分为宏观尺度结构优化 (macro-scale) 和微观尺度结构优化 (micro-scale)。按照模型的优化尺寸的级别，结构优化可以分为单一尺度优化 (one-scale) 和多尺度优化 (multi-scale)。单一尺度优化是指仅在宏观尺度或微观尺度上进行优化。多尺度优化是指优化对象既包含了宏观尺度的变量也包含了微观尺度的变量。按照结构设计的方向性，结构优化又可以分为各向同性结构设计和各向异性结构设计。按照优化的工具，结构优化可以分为基于有限元的结构优化方法与基于等几何的结构优化方法。图 1.9 展示了结构优化的分类方法。

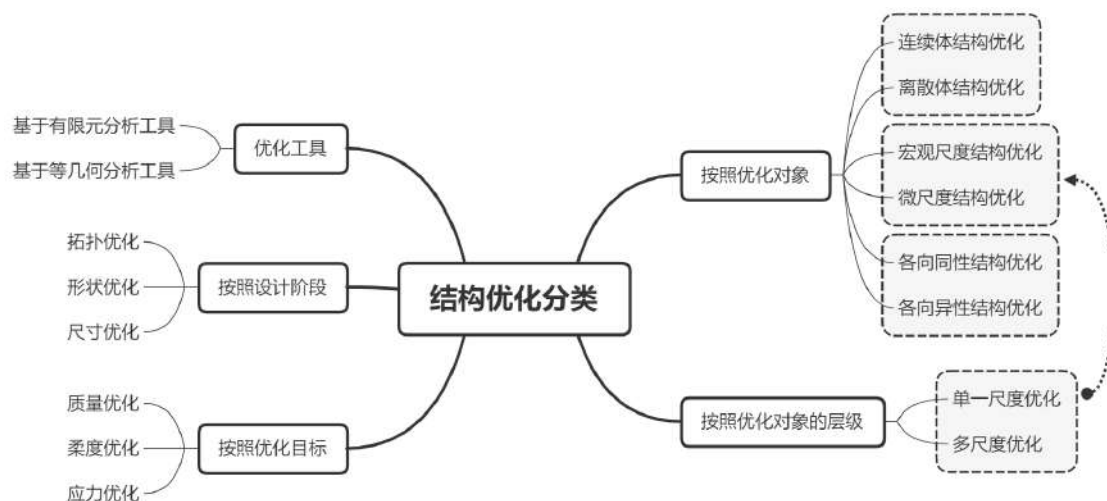


图 1.9 结构设计中优化问题分类。

本文第三章研究带有应力约束的拓扑优化问题，第四章围绕微结构的可微性设计展开研究。两章内容分别属于连续体结构优化和微尺度结构优化范畴。连续体结构优化是在离散体结构优化的基础上发展而来。为了契合文章主旨，在此介绍离散体结构优化，连续体结构优化，微尺度结构优化三类问题的研究进展。

(1) 离散体结构优化

结构设计的概念从 19 世纪 60 年代提出到现在已有 100 多年, 然而它直到近几十年才得到迅速的发展。结构优化技术最初是应用于离散体中, 针对杆结构和桁架结构进行优化。对于简单的离散体结构优化问题, 一些研究学者先用解析方法进行求解, 之后利用数值方法进行近似。在 1854 年, Maxwell^[40] 针对桁架结构进行了基本的分析。他以最小化重量为目标并且加入了应力约束。在 1904 年, Michell^[41] 提出了 Micell 准则。Micell 准则研究在一个外力作用下的桁架结构, 加入了应力约束条件并分析此时最优桁架 (以最小化重量) 的状态。通常的, 我们将满足 Michell 准则的桁架称为 Michell 桁架。Michell 准则利用解析方法进行分析求解, 它是建立在严格的理论基础之上的, 之后它被称为结构优化设计理论的一个重要里程碑。然而 Michell 准则是在单工况的情况下进行研究的, 虽然有重要的理论研究意义但是它并没有在实际工程领域中得到广泛的应用。

在 1964 年, Dorn 等人^[42] 提出了基结构法, 标志着离散体结构的研究从解析阶段进入了数值求解阶段。Dorn 将优化思想引入到模型求解当中, 以桁架结构的横截面积为变量。从一系列的结构中筛选出基结构, 如果结构的横截面积达到 0 或者指定下限, 就可认为该桁架被删除。最终针对所有的结构都得到了对应的横截面积, 对应构建的结构称为基结构。Dorn 将数值优化思想引入了离散体结构优化领域, 从而促进了离散体结构优化的发展。

离散体结构优化是在 Michell 理论的基础上不断发展的。在 1965 年, Cox^[43] 证明了 Michell 桁架既是最小质量设计同时也是最小柔度设计。与此同时, Michell 准则也可应用于刚度和动力参数的约束^[44]。之后经过 Hemp^[45], Rozvany^[46-47] 等科研工作者的不断深入的研究, 现在已经有多种约束情况的优化准则。尽管如此, 对于解析解, Michell 理论求解困难, 并且没有通用的求解方法, 目前为止也仅仅得到了几个 Michell 桁架的解析解。对于数值解, 一般利用基结构方法求解。在设计空间内部规则的放置足够多的结点, 将结点与结点之间用杆进行连接形成基结构, 然后对每个杆件进行横截面积的优化。这种优化思想虽然容易理解, 但是它在数值求解阶段仍存在如下局限性:

- 奇异性问题。当杆件的截面接近于 0 时, 会出现应力不为 0 的情况 (极限应力)。在数值迭代过程中造成剧烈震荡从而找不到最优解。程耿东^[48] 对奇异性问题进行研究, 放松应力扩充退化的子空间, 保证求得最优解。
- 结点个数直接决定求解量级。基结构方法的变量是杆件的横截面, 基结构是由任意两个结点连接而产生的。结点个数增多会造成杆件个数的剧烈增多, 给优化求解造成巨大的困难。在巨大的离散空间中寻求最优解是非常大的挑战。
- 删除的杆件难以恢复。当杆件的截面一旦趋于 0, 算法将其删除, 然而在

后续的迭代过程中该杆件的横截面积很难变大。这样的操作限制了最优解的迭代路径，很有可能找不到最优解。

(2) 连续体结构优化

连续体结构优化作为目前结构优化的主要研究对象相比于离散体结构优化其应用范围更广。离散体结构的广泛讨论加深了研究学者对结构优化的认识，间接促进了连续体结构优化的深入研究。连续体结构优化在 1988 年 Bendsøe 和 Kikuchi^[39] 提出均匀化方法之后得到了迅速的发展。按照优化的使用工具，连续体结构优化可分为基于有限元的优化与基于等几何的优化。相比于等几何分析方法，有限元方法在工业领域应用更加广阔。基于有限元的连续体结构优化的基本思想是把设计域离散成若干个小单元，依据一定的算法进行优化，形成拓扑变化的连续体。目前常用的结构优化方法有均匀化方法^[39]、变厚度法^[49]、变密度法^[50]、渐进结构优化方法 (ESO)^[51]，双向渐进结构优化 (BESO)^[52]、水平集方法^[53] 和独立连续映射方法 (ICM)^[54] 等等。

均匀化方法^[39] 以孔洞尺寸为设计变量，以孔尺寸的增加或者减小来实现微结构的增减，从而改变拓扑结构。均匀化方法的提出大大促进了结构优化的发展。在 1993 年，Mlejnek 在均匀化方法的基础上提出变密度方法^[50]，将单元的密度看作设计变量。中间密度单元在现实中是不存在且难以制造的，因而在优化过程中，需要对中间密度进行惩罚，使之逼近 0 或 1。变密度方法中常用的插值模型主要有：固体各向同性惩罚模型^[39,55](Solid isotropic material with penalization, SIMP) 和材料的合理近似模型^[56](Rational Approximation of Material Properties, RAMP)。同年，渐进结构优化方法 (ESO)^[51] 被 Xie 等人提出。该方法逐步将无效或者低效的材料从模型中删除，使结构最终趋于符合一定工程要求的结构。ESO 方法原理简单，算法实现方便，物理概念明确，与现有的有限元分析软件可以很好结合。独立连续映射方法 (ICM)^[54] 使用在 $[0,1]$ 上连续变化的拓扑变量表征单元，建立拓扑变量与约束的函数关系 (过滤函数)，在每步迭代中求出所有单元的拓扑变量，然后依据某种删除准则将变量值小于阈值的单元从结构中删除。之后对改变后的结构进行下一步迭代分析直至收敛。Osher 提出水平集方法^[53] 以最小质量为优化目标，以柔度为优化条件。通过改变水平集函数使结构在边界应力大的地方向外扩张，即增加材料；在边界应力小的地方向内收缩，即去除材料。

上述算法可以依照不同的准则进行分类。夏天翔等人^[57] 按照优化方法的基本思路将其分为两大类。①改变优化对象的材料特性。主要包括：均匀化方法和变密度法。这种方法自由度更大并且可以达到在设计域内部开孔 (拓扑变化) 的目的。②改变优化对象的几何形状。主要包括：变厚度法，独立连续映射方法，渐进结构优化方法，水平集方法。这样的方法通过边界不断变形可以达到改变设

计域的拓扑的目的。周克民等人^[58]按照材料模型进行分类。①每个单元仅有一个设计变量，在求解的过程中采用准则法计算效率更高。②自由材料设计，具有最大的材料设计自由度。然而这样的材料并不与真实材料对应。③设计域内是一系列周期性分布的微结构。

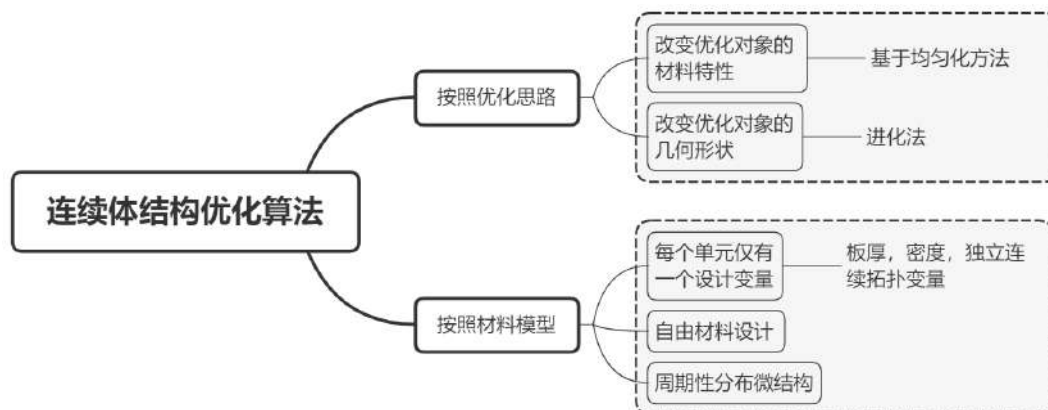


图 1.10 连续体结构优化分类。

数值方法归根结底是求解数学优化问题。基于变密度的连续体结构优化的求解为 0-1 整数规划问题。这样的问题在实际求解的过程中比较困难。在实际计算中通常将离散的设计变量转化为连续的设计变量，通过扩大设计域更好的获取最优解。与此同时，在设计变量上加入限制，使得最后的结果向 0 或者 1 逼近。这样就把离散问题转化为连续变量的优化问题。目前针对该类优化问题已经有了大量的研究，主要的求解方法有如下几种：

- 准则法。其计算效率高，对于一些简单的问题容易建立相应的准则和迭代公式。但是对于一些复杂问题，迭代公式难以推导且缺乏理论保证。通过准则法所得到的数值解不能保证是最优解或者局部最优解。这样的性质使得准则法在工业界不能得到广泛的应用。
- 数学规划算法。数学规划的基本思想由 Robert Dorfman 在 20 世纪 40 年代末提出。古典的微分方法只能用来解决简单的非线性优化问题。对于复杂的非线性优化问题，可采用数学规划算法求解。数学规划算法需要导数信息，一般非凸问题都是利用凸问题进行近似求解。目前已经有很多数学规划算法，如线性凸优化方法 (convex linearization method(CONLIN), 1989)^[59]、移动渐进优化方法 (method of moving asymptotes(MMA), 1987)^[60]、全局移动渐进优化方法 (globally convergent method of moving asymptotes(GCMMA), 1993)^[61]、二次规划方法 (sequential quadratic programming, 1995)^[62]、原始对偶内点方法 (primal-dual interior point methods, 1998)^[63]、增广拉格朗日方法及拉格朗日乘子法^[64]。
- 启发式算法。该算法给出了一个经过设计的启发式函数，它相比于盲目搜

索更加高效，且一般在较短的时间内就可以得到一个搜索问题的最优解。对于多项式复杂程度的非确定性问题 (NP 问题)，也可以在多项式时间内得到一个相对优的解。其难点在于如何根据问题建立符合实际的启发规则。常见的启发式算法有：遗传算法^[65]、模拟退火算法^[66]、各种群算法如蚁群，鱼群，粒子群等。这样的算法理论模型简单并且不需要目标函数的导数信息。

(3) 微结构的拓扑优化

自然界中广泛存在的多层次微结构大多具有独特功能(图1.11)，受此启发微结构在微流体器件、生化分析、仿生利用等方面具有广泛应用。微尺度结构优化又称为微结构拓扑优化，目前科研工作主要针对周期性介质进行讨论。针对微结构设计的优化目标一般为特定的材料特性如：负泊松比，高弹性模量等。泊松比决定了材料承受纵向拉伸时，横向尺寸如何变化。目前大多数的工程材料在承受单轴拉伸时横截面会发生收缩，此时泊松比为正值，一般在 0 到 0.5 之间。而有些材料在承受单轴拉伸时横截面发生扩张，该材料为负泊松比材料。目前研究发现，猫等动物的皮肤是复杂的微结构纤维且都具有负泊松比效应，人类小腿的一些松质骨由于其特殊的多孔结构，在受力时也具有负泊松比行为。弹性模量是单向应力状态下应力除以该方向的应变，它衡量物体抵抗弹性变形能力大小的尺度。所以制备负泊松比材料，高弹性模量材料具有巨大的现实意义。



图 1.11 自然界中的微结构。

与周期性微结构的设计相关的是功能性梯度材料的设计^[67]。功能性梯度材料随着体积分数的增大，其物理性质也呈现梯度性增大(见图 1.12)。目前针对功能性梯度材料的优化方法主要有：①优化离散体积的单一微结构的逆均匀化方法(见图 1.13(a))；②微结构的兼容性优化方法^[68](见图 1.13(b))；③针对给定微结构的均匀化形态学扩张算法(见图 1.13(c))；④基于符号距离场的结构插值算法(见图 1.13(d)-(f))；均匀的形态学扩张算子是基于微结构的轮廓线不断向外进行均匀偏置得到一系列体积分数逐渐增大的微结构序列。值得说明的是这种算法不会产生微结构的连接性问题。然而，基于符号距离场的几何结构插值在大多

数情况下产生的微结构序列的连接性不能保证。其原因是初始和最终微结构的符号距离场在加权的过程中会产生无意义的结构。基于符号距离场的算法需要输入要插值的微结构，即图 1.13(d)-(f) 的最左侧和最右侧微结构。该方法所产生的微结构序列与输入插值的微结构息息相关。图 1.13(f) 展示了插值过程的存在连接性问题的微结构。

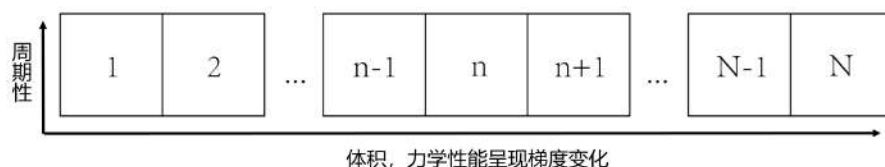


图 1.12 功能性梯度材料示意图。

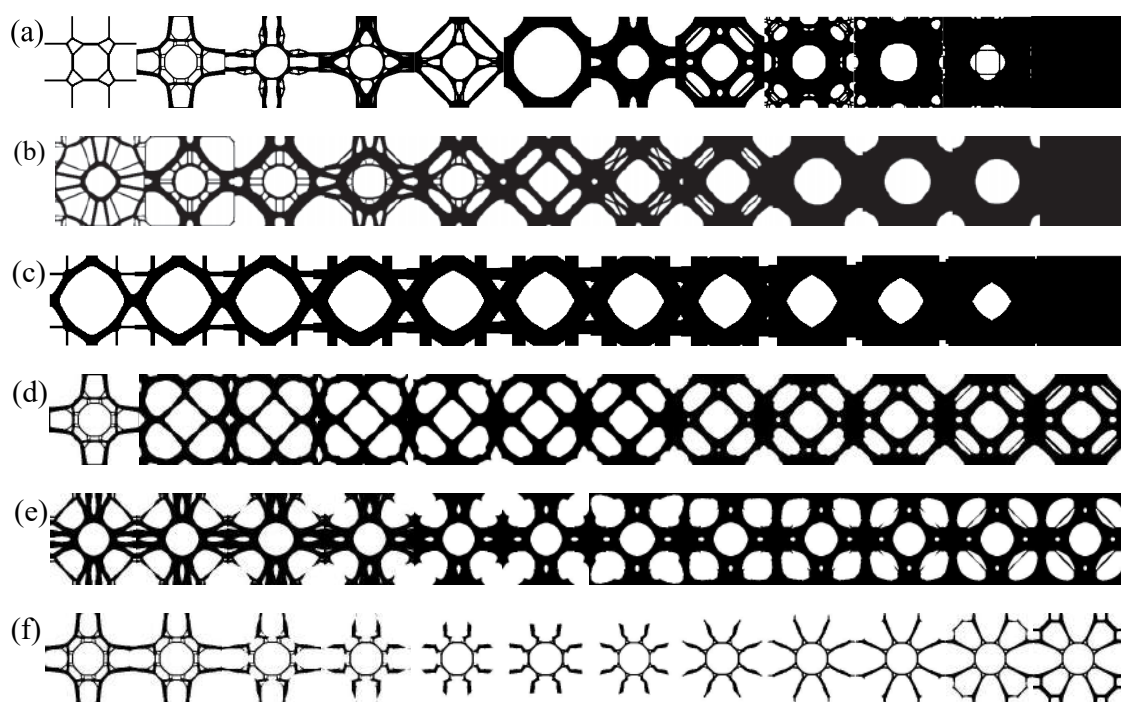


图 1.13 多种微结构生成算法示例图。(a) 基于逆均匀化算法的体积递增的单个微结构优化;(b) 兼容性微结构设计;(c) 针对最左侧微结构进行均匀形态学扩张算子操作;(d) 基于符号距离场的微结构插值 (示例 1);(e) 基于符号距离场的微结构插值 (示例 2);(f) 基于符号距离场的微结构插值 (示例 3);

尽管针对微结构的优化设计已经有了大量的研究，但是目前其依旧存在一些问题仍有待进一步解决：

①应力约束问题。拓扑优化已广泛应用于(宏观)结构的强度设计当中，但直到近几年才扩展到微结构材料设计。应力约束在结构优化中的主要挑战是非线性、奇异性和由于应力约束的局部性而导致的高计算成本。在微结构的设计中依然需要解决这三个问题。Collet 等人^[69]提出一种防止微结构生成过程中经常出现的高应力集中的公式，优化带有应力约束的周期性微结构。

②微结构连接性问题。针对功能性梯度材料的设计，需要一系列的微结构作为支撑。相邻的微结构之间需要相连才能保证宏观结构的物理性能。在多尺度优化问题中需要创建一个微结构数据库。Tareq 等人^[70]提出了一种后处理方法，利用隐式函数对两个给定的微观结构进行插值，以保证界面的光滑连通性。Zhou 等人^[71]引入了一种基于刚度约束的形状变形方法来生成几何渐变的微观结构。Deng 等人^[72]提出了一种新的连接移动变形构件的方法，保证了微结构之间平滑过渡，实现了微结构的良好连接。Du 等人^[73]提出了带连通性约束的水平集方法来生成功能性梯度材料，并将其应用于多尺度拓扑优化当中。Eric 等人^[68]对相邻微结构进行兼容性优化，以保证相邻微结构的几何连接性的同时提升微结构的物理特性。

③三维微结构计算效率问题。在二维的功能性梯度材料的产生问题中，设计变量多会产生严重的计算负担。三维微结构的优化计算效率依然是一个挑战。

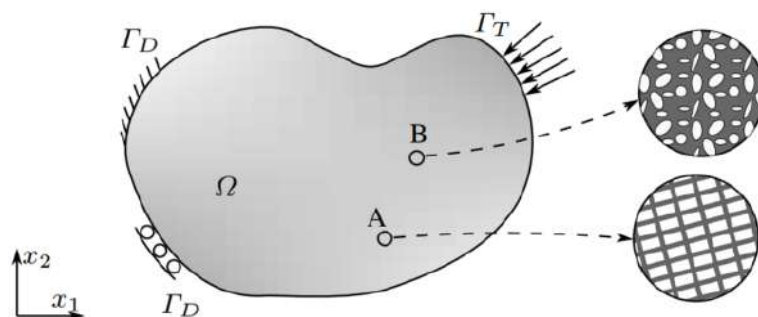


图 1.14 多尺度结构图例。 Ω 为设计域， Γ_T, Γ_D 为边界条件。A, B 为设计域中的任意两点。

多尺度结构普遍存在于客观世界中，但引起研究学者们的注意却是近几十年的事情。图1.14显示了多尺度结构。该结构的每一点都可以表示成周期性局部微结构。Wu 等人^[74]全面总结了多尺度结构的研究工作。他们将多尺度研究方法进行分类，划分为基于均匀化方法的优化方法，基于密度方法的优化方法，逆均匀化方法和全尺度优化。本文按照优化算法的层级分为解耦多尺度优化和多尺度的协同优化。解耦多尺度优化方法是在宏观尺度和微尺度上交替优化的算法。Schumacher 等人^[75]为了设计多尺度结构首先将设计域进行离散划分成若干正方体，然后在每个正方体内部填充一系列彼此相连的微结构，最后将正方体与设计域边缘作差，减去在设计域外围的区域得到理想多尺度结构。Chougrani 等人^[76]利用杆架结构对设计域填充。这样就省去了离散化的步骤，但是填充的杆架结构依然要与边界求交。多尺度的协同优化同全尺度优化方法。其主要有两种优化策略：重复填充算法和基于局部体积约束的填充算法。Almeida 等人^[77]提出了基于密度的优化方法在保证结构的对称性的同时产生了一系列的结构重复的多尺度结构。Wu 等人^[78]提出基于体积约束的全尺度优化方法。该方法是在整个设计域内每个点的邻域内对其体积分数施加一个上界。这样保证了所有点

周围的密度不至于过大。

1.3 本文结构安排

本文的主要研究工作如图1.15所示，各章的组织结构如下：

第一章，绪论：首先介绍了增材制造与结构设计的背景及研究意义。本文重点介绍了增材制造中路径规划问题和结构设计中连续体结构设计与微结构设计的研究进展和挑战难点。

第二章，基础知识：首先介绍了弹性力学的基本概念与基本方程。其次介绍了弹性力学的数值求解算法，即有限元方法和等几何分析方法。最后介绍了结构优化中的均匀化理论，变密度法理论和正则化算子。

第三章，带有应力约束的拓扑优化问题：首先分析基于有限元的应力约束的拓扑优化问题。本文以极小柔度为目标函数，限制结构的应力与体积，提出一种加速的增广拉格朗日乘子算法，即交替方向选择算法。按照同样的思路，我们分析基于等几何的应力约束的拓扑优化问题，并进行灵敏度分析。然后我们利用交替方向选择算法对数值算例进行求解。

第四章，可微的微结构设计：本文首先提出结构的“可微”的概念，并阐释“可微”结构的研究意义。其次为了得到可微的微结构序列介绍了基于优化的热传导系数的温度场投影方法。

第五章，增材制造领域中的路径规划问题：本文对复杂结构的路径规划问题进行研究。将复杂结构划分为边界复杂结构和拓扑复杂结构，然后分别针对这两类复杂结构进行路径填充，两种填充算法的共同思想是“化繁为简”。将复杂区域简单化，然后针对简单的区域进行路径填充最后进行全局连接以提升打印效率。

第六章，总结与展望：总结了本文所取得的成果和创新之处，并对未来的研究工作进行了展望。

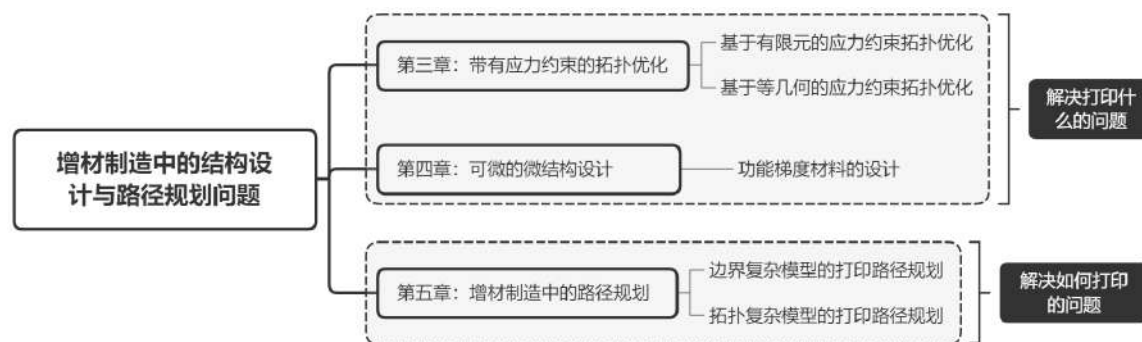


图 1.15 本文组织结构图。

第2章 基础知识

2.1 弹性力学的基础知识

弹性力学解析方法是从弹性力学的基本方程开始，寻找满足各类偏微分方程，应力边界条件，位移边界条件以及适合全域的解析解。本节首先介绍弹性力学的基本假设、基本概念和基本方程，其次介绍弹性力学的有限元分析方法和等几何分析方法。

弹性力学研究的是处于弹性变形阶段的物体，在去除外力后，弹性体可以恢复至原状。在弹性力学的研究中有以下基本假设：

- 物体是连续介质，均质，完全弹性和各向同性的；
- 物体是无初应力的；
- 物体的变形是很小的；

2.1.1 基本概念

弹性体在外力的作用下，移动的距离为位移 q ，通常分解为沿 x ， y ， z 坐标轴的三个分量 u ， v 和 w ，位移表示为：

$$\{q\} = \{u, v, w\}^T.$$

其内部任意截面的应力为 S ，可分解为与截面垂直的正应力 σ 和在截面内的剪应力 τ 。在空间弹性体中的一点，不同方向截面上的应力是不同的，通常点 P 的应力状态用通过该点的六面微分体表示。 P 点的正应力表示如下：

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}]^T. \quad (2.1)$$

如图2.1所示， σ_x 对应截面上的剪应力为 τ_{xy} 和 τ_{xz} ，分别指向 y 轴和 z 轴正方向。其他截面上的正应力和剪应力同理。上述微分体在受力变形后成为任意六面体。各方向棱长改变量称为正应变，用 ϵ_x ， ϵ_y ， ϵ_z 表示。成直角的两棱边角度的改变量称为剪应变或角应变，用 γ_{xy} ， γ_{yz} ， γ_{zx} 表示，其中下标表示与两棱边平行的坐标轴。空间弹性体产生的应变如下：

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}]^T. \quad (2.2)$$

2.1.2 基本方程

(1) 静力平衡方程

静力平衡方程又称纳维 (Navier) 方程，是弹性体内部应力分量之间必须满足的条件，表示了弹性体内部分量之间的关系。在外力作用下，弹性体内部任意一

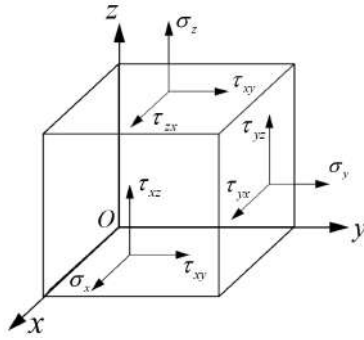


图 2.1 微分体的应力示意图。

点可用六面微分体表示。由于微分体是从处于平衡状态的弹性体内取出，因此微分体在空间保持平衡，即满足各个坐标方向力的平衡和力矩的平衡。由此可得如下方程式：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + G_x = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + G_y = 0, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + G_z = 0. \quad (2.5)$$

其中， G_x, G_y, G_z 为单位体积力 G 在 x, y, z 方向的分量。

(2) 几何方程

几何方程又称为柯西 (Cauchy) 方程，该方程将位移与应变联系起来。弹性体在受外力作用产生变形和位移时，引起的应变可归纳如下：

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T, \quad (2.6)$$

$$= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \right\}^T. \quad (2.7)$$

可简写为

$$\{\epsilon\} = [B]\{q\}.$$

其中， $[B]$ 为应变矩阵。

(3) 本构方程

本构方程又称广义胡克定律阐释了应变与应力的关系。

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}, \quad (2.8)$$

$$= [D]\{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}, \quad (2.9)$$

$$= [D] \cdot \epsilon. \quad (2.10)$$

其中 $[D]$ 为弹性矩阵，是一个对称方阵，只与弹性模量 E 和泊松比 μ 有关。对于平面应力问题和平面应变问题的不同， D 的选取也不同。

任何力学问题如果严格的定义的话都属于空间问题。如果弹性体的形状特殊,并承受特定的载荷,可以将空间问题转化为平面问题,这样就可以简化问题和计算工作量。这样的操作是工程分析中常见的简化处理方法。

平面应力问题是指弹性体的形状为薄板,厚度远远小于其他尺寸。平面应力问题需要满足如下两个条件:①z轴方向尺寸远远小于x轴和y轴的尺寸;②所受载荷完全在板内,沿板厚不变化,没有垂直于板面的载荷;平面应力问题的弹性矩阵 $[D]$ 为:

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

如果弹性体长度方向的尺寸远远大于横截面尺寸,且仅受平行于横截面和沿长度不变化的外力,在长度方向的变形为0。平面应变问题需要满足两个条件:①z轴方向尺寸远远大于x轴和y轴的尺寸;②在z轴方向上的变形 $w = 0$,仅受平行于横截面和沿长度不变化的外力作用;平面应变问题的弹性矩阵 $[D]$ 为:

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

(4) 单元基本方程

在结构弹性力学中有两个重要的原理:虚位移原理和最小位能原理。虚位移原理表示外力在虚位移上所作的虚功等于弹性体内应力在虚应变上所作虚功,通过虚位移与虚应变来表示弹性体的外力与应力之间的关系。最小位能原理表示在符合已知位移边界条件的所有位移中,能满足外力边界条件和平衡方程的位移所对应的总位能为最小值。以四节点矩形单元为例,在每个矩形单元上建立形函数,那么每一点的位移都可用节点处的位移进行插值表示:

$$\{q\} = [N]\{q\}^e.$$

其中, $[N]$ 为形函数矩阵。单元内任意一点的虚位移为: $\{\delta q\} = [N]\{\delta q\}^e$ 。虚位移产生的虚应变为: $\{\delta \epsilon\} = [B]\{\delta q\}^e$ 。节点力 $\{F\}^e$ 在节点虚位移 $\{\delta q\}^e$ 上所做的虚功为:

$$\delta W = \{\delta q\}^{eT} \{F\}^e.$$

单元应力在虚应变上所做的虚功为：

$$\delta U = \iiint \{\delta \epsilon\}^e T \{\sigma\}^e dx dy dz, \quad (2.13)$$

$$= \iint \{[B]^e \{\delta q\}^e\}^T \{[D][B]^e \{q\}^e\} dx dy \cdot h, \quad (2.14)$$

$$= \{\delta q\}^e \iint [B]^e T \{[D][B]^e\} dx dy \cdot h \{q\}^e, \quad (2.15)$$

$$= \{\delta q\}^e [k]^e \{q\}^e. \quad (2.16)$$

其中， $[k]^e$ 称为单元刚度矩阵，

$$[k]^e = \iint [B]^e T [D][B]^e dx dy \cdot h.$$

式中， h 为单元厚度。利用虚功原理 ($\delta U = \delta W$) 可得单元基本方程 (表示了节点力与节点位移之间的关系是)：

$$[k]^e \{q\}^e = \{F\}^e.$$

总刚度矩阵的形成过程是单元刚度矩阵的叠加过程。其具有对称性、奇异性和主元恒正性的特点。总刚度矩阵存在大量的零元素且非零元素集中分布在主对角线两侧的带状区域内，故总刚度矩阵也具有稀疏性和带状分布的特点。

2.2 弹性力学数值处理方法

2.2.1 有限元分析方法

当求得解析解之后进而可以得到弹性体区域内任意点的解。但是对于大多数的实际问题而言，由于边界、载荷和约束条件的复杂度较大，很难甚至根本无法用解析的方法求得解析解。由于确定满足整个弹性体区域解析解是困难的，有限元分析方法从另外一个角度出发，将二维弹性体区域划分为数量有限的三角形或四边形进而去逼近连续区域。利用有限元分析方法的力学分析问题一般划分为三个主要的步骤 (见下图 2.2 所示)：前处理，求解和后处理。前处理阶段，有限元分析首先将其离散化，建立单元位移函数，然后进行单元特性分析，建立总体刚度矩阵和力的平衡方程，最后进行结果计算、显示和分析。平面问题的有限元分析方法主要包括三角形单元和四边形单元。根据节点的多少，三角形单元又可以分为 3 节点三角形单元和 6 节点三角形单元；四边形单元又分为 4 节点矩形单元和 8 节点四边形单元。对于空间问题的有限元分析方法又分为四面体单元、六面体单元和等参单元。

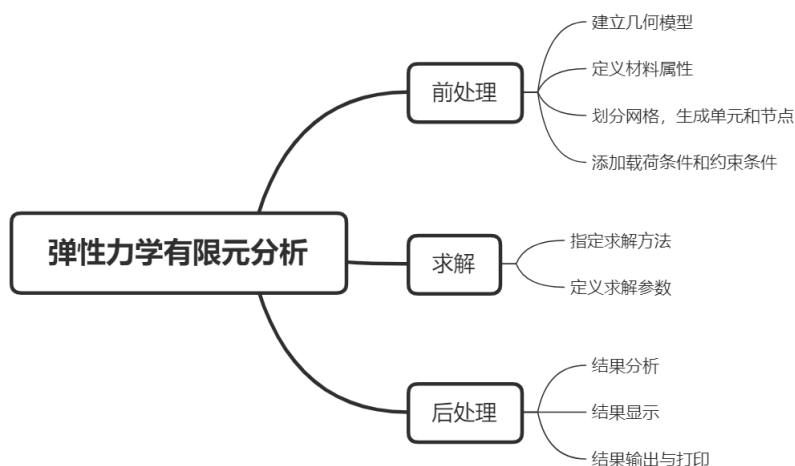


图 2.2 有限元分析步骤。

2.2.2 等几何分析方法

等几何分析方法 (Isogeometric analysis, IGA) 是以样条理论为基础的数值计算方法，它集成了 CAD 模型与 CAE 模型，实现了几何模型与计算模型的统一表达即在定义几何模型的同时，分析模型也随之完成，在修改分析模型的同时，几何模型也会有相应的变化。本小节介绍的 B 样条基函数，非均匀有理 B 样条 (NonUniform Rational B-Spline(NURBS)) 曲面的基本定义与基于等几何分析的拓扑优化相关的公式。

(1) B 样条基函数

给定节点向量 $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+k}\}$ ($\forall i, t_i \leq t_{i+k}$), 其中 t_i 称为节点。基函数的 de Boor-Cox 递推定义是

$$N_i^k = \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k} - t}{t_{i+k} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t).$$

其中

$$N_i^1 = \begin{cases} 1, & t_i \leq t \leq t_{i+1}. \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

其中， n 是基函数的个数， k 是多项式的阶数 (次数为 $k-1$)。如果节点是均匀分布的，那么称为均匀 B 样条基函数，否则称为非均匀 B 样条基函数。图 2.3 展示了节点为 $\mathbf{T} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ 的非零的一次与二次 B 样条基函数。

(2) NURBS 曲面

非均匀有理 B 样条 (NURBS) 指的是：节点分布均匀且有理的 B 样条。给定节点向量 $\mathbf{S} = \{s_0, s_1, \dots, s_{n+p}\}$, ($\forall i, s_i \leq s_{i+p}$) 和 $\mathbf{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_{n+q}\}$, ($\forall j, t_j \leq t_{j+q}$), 其中， p 是在 s 方向的阶数， q 是在 t 方向的阶数。NURBS 曲面分段有理函数的

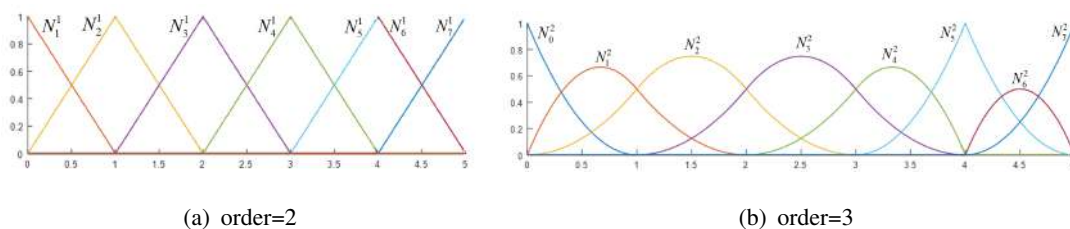


图 2.3 (a) 一次 B 样条基函数, $T = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$; (b) 二次 B 样条基函数, $T = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$;

形式如下:

$$R(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(s) N_j^q(t) w_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(s) N_j^q(t) w_{i,j}}, \quad 0 \leq s, t \leq 1. \quad (2.17)$$

$\{P_{i,j}\}$ 构成了一张控制点网格, $\{w_{i,j}\}$ 是权重系数, $\{N_i^p(s)\}$ 和 $\{N_j^q(t)\}$ 是单变量的有理 B 样条的基函数, 其节点向量分别为 S 和 T 。区域 $[s_0, s_{i+p}] \times [t_0, t_{j+q}]$ 是由节点向量 $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ 张成的。在图2.4中, 我们绘制了在 s 和 t 方向的张量积曲面。为了书写方便, 简化的有理基函数

$$R_{i,j}(s, t) = \frac{N_i^p(s) N_j^q(t) w_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_i^p(s) N_j^q(t) w_{i,j}}$$

用 $R_{i,j}(s, t)$ 代替。所以公式 (2.17) 可以写成

$$R(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(s, t) P_{i,j}$$

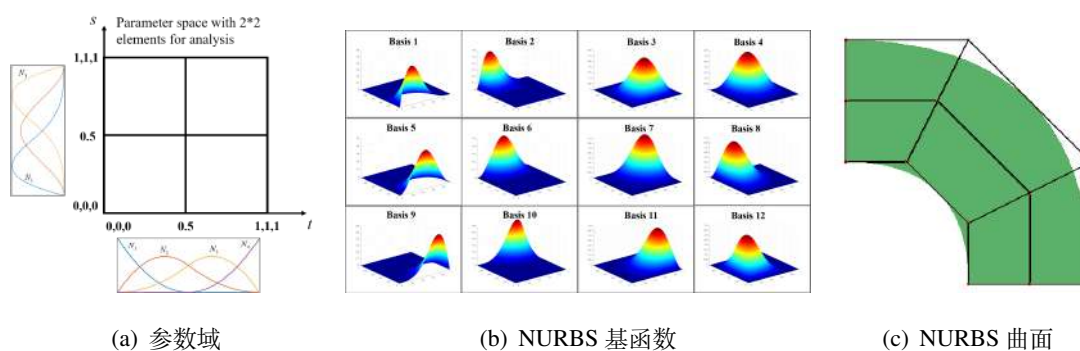


图 2.4 给定 $S = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$, $T = [0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1]$ 和 $w_{ij} = 1$ 。(a) 参数域; (b) NURBS 基函数; (c) NURBS 曲面;

NURBS 增加了权重向量, 弥补了 B 样条难以描述标准解析形状的缺陷。每个控制点的权值决定了曲线与相应控制点之间的距离。值得注意的是, 如果权值相等, NURBS 退化为 B 样条。

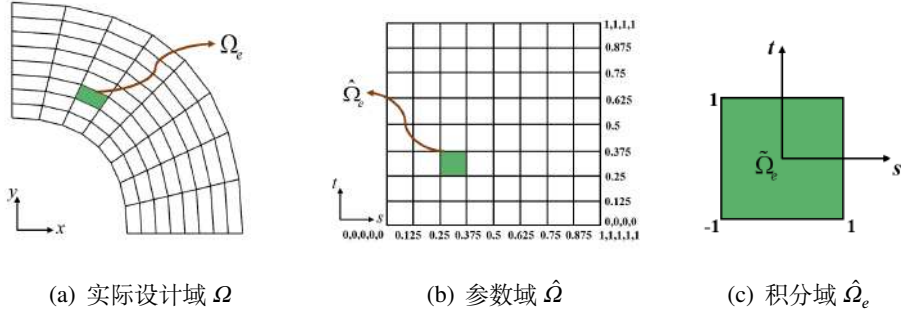


图 2.5 (a) 实际设计域 Ω ; (b) 参数域 $\hat{\Omega}$, $T = \{0,0,0,0,0,0.125,0.25,0.375,0.5,0.625,0.75,0.875,1,1,1,1\}$ 和 $S = \{0,0,0,0,0.125,0.25,0.375,0.5,0.625,0.75,0.875,1,1,1,1\}$; (c) 积分域 $\hat{\Omega}_e$;

(3) 等几何分析的结构表示

基于等几何分析的概念，NURBS 不仅是一种几何表示方法，也是一种结构分析的离散化工具。首先在图2.5，我们定义 Ω 为物理域， $\hat{\Omega}$ 为参数域。在本文中，我们通过 k-细化得到一个细分，得到许多单元 $\hat{\Omega}_e$ 。在分析过程中，我们将 NURBS 基函数作为形状函数。任意一点的位移函数 u (密度 ρ) 是由控制点的位移值 u_{ij} (ρ_{ij}) 进行加权而得到。这种表示法在计算过程中效率较低^[79]。基于这种现象，响应分析和灵敏度计算采用各单元内部的恒密度分布，因此选择单元质心内的位移函数和密度函数，表示为公式 (2.18- 2.19) 的右侧。

$$u(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n R_{i,j}^{p,q}(s, t) u_{i,j} \Rightarrow u_e = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n R_{i,j}^{p,q}(s_e^c, t_e^c) u_{i,j}, \quad (2.18)$$

$$\rho(s, t) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n R_{i,j}^{p,q}(s, t) \rho_{i,j} \Rightarrow \rho_e = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n R_{i,j}^{p,q}(s_e^c, t_e^c) \rho_{i,j}. \quad (2.19)$$

式中 $R_{i,j}^{p,q}(s, t)$ 是 NURBS 基函数， u_e, ρ_e 表示第 e 个等几何单元的相对位移和密度值 ($e = 1, 2, \dots, N_e$)， s_e^c, t_e^c 表示单元中心的参数坐标。

如果我们想计算在物理域 Ω 的任何点的物理量 (例如应力 σ ，应变 ϵ)，利用控制点上的值 (例如应力 $\sigma_{i,j}$ ，应变 $\epsilon_{i,j}$) 进行加权组合得到。需要注意的是，最后所有积分都转换为定义在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 的高斯积分。

(4) 两种数值分析方法的比较

等几何分析方法是基于有限元分析方法的等参单元的思想，直接利用 CAD 模型作为几何模型的高阶有限元分析方法。等几何分析方法采用 NURBS 基函数，该类函数具有非负性，单位分解性，局部支撑性和光滑性特点，使其在设计域的表达上相比于有限元分析方法有独特的优势。除此之外，NURBS 基函数的变差减缩性避免了随着多项式阶次增大而产生的剧烈震荡问题。以下表格描述了等几何分析方法与有限元分析方法的区别。

等几何方法与有限元分析方法也有一些共同点：①都有等参的概念。等几何

	等几何分析方法	有限元分析方法
分析模型	样条曲面(体)(精确表示)	网格面(体)(近似表示)
基函数	样条基函数	拉格朗日基函数
基函数性质	都是正值	不一定是正值
自由度	样条控制点	有限单元节点
插值性	基函数不插值控制点	基函数插值控制点
单元细分方法	插入节点、升阶、几何保持不变	网格加密、几何可能改变
连续性	最高有 $C^k - 1$ 连续性	通常仅有 C^0 连续性
凸包性	具有凸包性	不具凸包性

表 2.1 等几何分析方法与有限元分析方法的区别。

方法的等参概念是结构对象的表示域与其参与计算域的参数是一样的。有限元分析方法的等参概念是在划分的单元的基础上。基于单元划分的单元表示参数与参与数值计算的参数相同。② 基于 Galerkin 变分方法推导。③ 刚度矩阵都是带状的。

2.3 拓扑优化算法

拓扑优化目前有很多求解方法。比如早前出现的均匀化方法 (Homogenization method)^[39], 变密度方法^[50], 渐进结构优化方法 (ESO)^[51], 相场法^[80] 等。自从均匀化理论提出之后, 基于复合材料微结构实现了对复合材料的宏观等效属性的评估。目前, 均匀化理论已经在工程中广泛应用, 是复合材料等效性能仿真和结构优化常用的方法之一。本节主要针对均匀化理论, 材料密度插值模型和结构优化中的正则化处理进行详细阐述。

2.3.1 均匀化理论

20 世纪 80 年代, Bendsøe^[39] 基于周期性结构分析方法在研究非均匀材料时引入了一种等效替代的数学方法即均匀化理论。该方法采用局部周期性假设, 在宏观结构的不同点可以有不同的微结构。后来 Suzuki 和 Kikuchi 等人^[81] 又把均匀化理论与有限元分析方法结合起来用于分析复合材料的线弹性问题。在此我们总结均匀化理论的使用前提是:

- 复合材料是连续的。
- 微观尺度 X 相对于宏观尺度 Y 是一个很小的量 ϵ , 即 $Y = \frac{X}{\epsilon} (0 < \epsilon \ll 1)$ 。
- 宏观复合材料 Ω 可以看作微观单胞结构周期性重复排列而成。用数学方法可以有如下表示: 从宏观尺度结构上任取一点 X , X 都可看作是微尺度单胞 Y 的周期性变化。微观的单胞结构具有周期重复性, 所以其物理性质

(如位移, 应变, 应力等) 也可视为周期性变化的即:

$$\Phi^\epsilon(x) = \Phi(x, y) \quad y = \frac{x}{\epsilon},$$

上标 ϵ 表示该函数具有两种尺度的特征。微尺度的单胞具有 Y -周期性:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, y + Y).$$

均匀化方法通过对位移和应力场进行展开并利用变分原理进而求得等效的物理模量。其中展开方法常见的有三种: 渐进展开法 (Asymptotic expansion), 泰勒级数近似法 (Taylor Series Approximation), 傅里叶变换方法。渐进展开是常用的一种展开方法, 在此本文对其进行阐述。

弹性体 Ω 受体力 f , 边界 Γ_g 上受表面力 g 的作用, 在边界 Γ_u 上给定位移边界条件 \bar{u} 。在此用张量表示法即在给定的边界和位移上分别满足:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^\epsilon n_j &= g_i \quad \text{on } \Gamma_g, \\ u_i^\epsilon &= \bar{u}_i \quad \text{on } \Gamma_\mu. \end{aligned}$$

在 Ω^ϵ 中, 应力场和位移场都满足平衡方程、几何方程和本构方程的张量表示为:

$$\text{平衡方程: } \sigma_{ij,j}^\epsilon = -f_i, \quad (2.20)$$

$$\text{几何方程: } e_{kl}^\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k^\epsilon}{\partial x_l^\epsilon} + \frac{\partial u_l^\epsilon}{\partial x_k^\epsilon} \right), \quad (2.21)$$

$$\text{本构方程: } \sigma_{ij}^\epsilon = E_{ijkl}^\epsilon e_{kl}^\epsilon. \quad (2.22)$$

Y -周期位移场可以近似为宏观坐标 x 的展开式, 其形式为:

$$u^\epsilon(x) = u^\epsilon(x) + u^\epsilon(x) + u^\epsilon(x) + \dots, \quad y = \frac{x}{\epsilon}.$$

物理量 Φ 依赖于两个尺度的变量即 x 和 y , 对宏观坐标进行微分可得:

$$\frac{\partial}{\partial x_i^\epsilon} \left(\Phi(x, y = \frac{x}{\epsilon}) \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}.$$

应变张量 e_{kl}^ϵ 代入几何方程:

$$e_{kl}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} e_{kl}^{-1}(x, y) + e_{kl}^0(x, y) + \epsilon e_{kl}^1(x, y) + \epsilon^2 e_{kl}^2(x, y) + \dots \quad (2.23)$$

将公式 (2.23) 代入本构方程得到应力得渐进展开式:

$$\sigma_{kl}^\epsilon = \frac{1}{\epsilon} \sigma_{kl}^{-1}(x, y) + \sigma_{kl}^0(x, y) + \epsilon \sigma_{kl}^1(x, y) + \epsilon^2 \sigma_{kl}^2(x, y) + \dots \quad (2.24)$$

将公式 (2.24) 代入到平衡方程中, 有

$$\frac{1}{\epsilon} \left[\frac{\partial \sigma_{ij}^{-1}(x, y)}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^{-1}(x, y)}{\partial x_j} \right] + \left[\frac{\partial \sigma_{ij}^0(x, y)}{\partial x_j} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \sigma_{ij}^0(x, y)}{\partial x_j} \right] + \dots + f_i = 0. \quad (2.25)$$

令 $e^i (i = -2, -1, 0, 1 \dots)$ 的系数为 0 可得一系列的控制方程, 取 $\epsilon^{-2}, \epsilon^{-1}, \epsilon^0$ 对应得三个控制方程即:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{-1}(x, y)}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(E_{ijkl}^e \frac{\partial u_k^0}{\partial y_l} \right) = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{-1}(x, y)}{\partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^0(x, y)}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j} \left[E_{ijkl}^e \left(\frac{\partial u_k^0}{\partial x_l} + \frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} \right) \right] = 0, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^0(x, y)}{\partial y_j} + \frac{\partial \sigma_{ij}^1(x, y)}{\partial y_j} = 0. \quad (2.28)$$

通过对公式 (2.28) 在 Y 内积分可得均匀化弹性常数:

$$E_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int \tilde{\sigma}_{ij}^{kl}(y) dY. \quad (2.29)$$

其中, $\tilde{\sigma}_{ij}^{kl}(y) = E_{ijpm}^e \left[T_{pm}^{kl} + \frac{\partial u_p^{kl}}{\partial y_m} \right], T_{ij}^{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ 。本文的第四章利用均匀化理论对可微的微结构进行设计。

2.3.2 变密度法理论

Bendsøe 等人^[56,82] 基于均匀化的缺点 (理论推导复杂和设计变量较多导致计算成本过高) 进行了改进提出了变密度法理论体系。变密度法将连续体区域离散, 给每一个单元上分配密度。0 代表孔洞单元, 1 代实体单元。从数学角度, 该问题为 0-1 整数规划问题, 其求解困难目前只能借助组合数学的方法, 随着离散单元的个数增多计算量难以估计以致于几乎不可能得到最优解甚至是可行解。

为了求解方便引入了一系列连续变化的人工密度单元, 变化范围是 0 与 1 之间。该方法将 0-1 整数规划问题转化为 0, 1 之间连续变量的优化问题。但是又由此引入了灰度单元, 0 和 1 之间的中间值是没有实际物理意义的。为了避免灰度单元的产生, 变密度法理论体系主要有两种惩罚策略: 固体各向同性微结构惩罚模型 (Solid Isotropic Microstructures with Penalization, SIMP)^[39,55] 和材料的合理近似模型 (Rational Approximation of Material Properties, RAMP)^[56]。SIMP 模型利用指数函数作为惩罚函数, RAMP 模型利用有理数对中间密度进行惩罚。单元 i 的杨氏模量 E_i 可表示为:

$$\text{SIMP 模型: } E_i(\phi) = E_{min} + \phi_i^p (E_0 - E_{min}), \quad (2.30)$$

$$\text{RAMP 模型: } E_i(\phi) = \frac{\phi_i}{1 + q(1 - \phi_i)} E_0. \quad (2.31)$$

其中, E_0 表示实体的杨氏模量, E_{min} 表示空材料的杨氏模量。为了避免刚度矩阵计算时会产生奇异性 E_{min} 一般取 10^{-9} 。 ϕ_i 为设计单元的密度, p 为 SIMP 模型的惩罚因子, q 为 RAMP 模型的惩罚因子。图 2.6 显示了 SIMP 模型和 RAMP 模型的惩罚对比图。

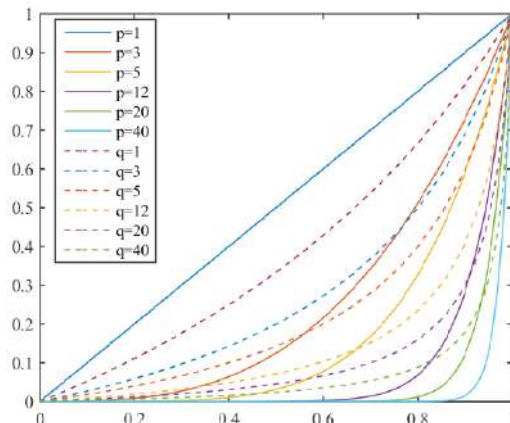


图 2.6 SIMP 模型和 RAMP 模型的惩罚对比图。实线表示 SIMP 模型惩罚函数；虚线表示 RAMP 模型惩罚函数；

RAMP 模型要求设计变量在密度为 0 处灵敏度不为 0, 有助于低密度单元的产生从而提高优化过程的稳定性。但是其采用有理数惩罚函数优化效率远远不如 SIMP 模型。SIMP 方法是变密度方法中的经典算法同时也被认为是最常用的拓扑优化算法。本文的第三章和第四章利用 SIMP 方法进行结构的优化计算。

2.3.3 正则化处理

在对连续体进行拓扑优化时, 我们希望得到一个边界光滑且清晰的优化结构。基于变密度方法得到的结构往往并不能直接投入实际应用, 因其会产生锯齿形状的边界。在 1988 年, Sigmund 和 Petersson^[83] 总结了大多数拓扑优化结果普遍存在的数值不稳定的问题, 其中主要有棋盘格现象^[84]、网格依赖问题、局部极值问题和灰度单元问题。

- 棋盘格现象是出现 0-1 交替的图案的现象；
- 网格依赖性优化的结果依赖网格的分辨率；
- 局部极值问题是在一样的分辨率前提下, 当选择不同的算法参数时得到的结果不同。

棋盘格现象是拓扑优化中的普遍现象。一般来说, 棋盘格与网格依赖现象容易同时发生, 消除网格依赖的同时也对棋盘格现象有抑制作用。为了避免棋盘格和网格依赖现象, 很多学者提出了一些切实有效的算法。目前已有如下算法: ①改变优化目标函数或者增加约束以使优化过程趋于稳定; Haber^[85] 提出的周长约束法通过限制周长来抑制棋盘格式的出现, 但周长的约束值事先难以确定,

只能通过试验方法得到。Petersson^[86]等提出局部梯度约束方法，通过引入局部密度变分的梯度约束，使相邻单元的密度变化相对平缓，从而抑制棋盘格式的出现。②采用稳定的有限元模型如高阶等参单元方法；Diaz 和 Jog^[84,87]的研究表明，这样的操作在均匀化方法中可有效避免棋盘格现象，而对于 SIMP 方法，只有当惩罚因子足够小时，采用高阶单元才可以避免棋盘格，但同时也使计算量急剧增加。Kikuchi 等人^[88]提出“超参元”的概念，规定4个相邻单元的组合方式排除可能出现棋盘格的组合来避免棋盘格的出现，但这种方法并不能彻底消除棋盘格现象。③后处理方法如光滑法（应用在图形学领域较多）和过滤技术。本文在此介绍两种过滤技术：密度过滤和灵敏度过滤。

当前单元 i 的中心点坐标是 x_i ，密度是 ϕ_i 。密度过滤的主要思想是由以 x_i 为圆心，过滤半径 r_{min} 的圆 S_i 内覆盖的单元 x_j 的灰度值加权平均得到，即：

$$\tilde{\phi}_i = \sum_{j \in S_i} W_{ij} \cdot \phi_j, \quad (2.32)$$

$$W_{ij} = \frac{W_i(x_j)V_j}{\sum_{j=1}^N W_i(x_j)V_j}. \quad (2.33)$$

其中 x_j 是单元 j 的中心点坐标并且 $j \in S_i = \{j | \|x_j - x_i\| \leq r\}$ ， $W_i(x_j) = \max\{r_{min} - d, 0\}$ ， $d = \|x_i - x_j\|$ 。式中 ϕ 为优化后单元密度， $\tilde{\phi}$ 为经过密度过滤之后的单元密度， W_{ij} 为以单元 i 为中心的单元 j 的权重函数， V_j 为单元 j 的体积。此处加上了体积项是为了满足密度过滤之后的体积保持不变，进而满足优化中的体积约束。

灵敏度过滤技术与密度过滤的思想相似，其对灵敏度（目标函数 C 对自变量 ϕ_e 的导数）进行加权平均从而解决拓扑优化结果中的棋盘格现象和网格依赖性问题。其表达式如下：

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \phi_e} = \frac{1}{x_e \sum_{k=1}^N W_e \phi_k} \cdot \sum_{i=1}^N W_e(\phi_k) \frac{\partial C}{\partial \phi_k}, \quad (2.34)$$

$$W_e(x_k) = r_{min} - d(x_e, x_k), \quad (2.35)$$

$$\{k \in N | d(e, k) \leq r_{min}\}, e = 1, 2, \dots, N$$

式中 $\frac{\partial \tilde{C}}{\partial \phi_e}$ 为中心单元 ϕ_e 过滤之后的灵敏度， $\frac{\partial C}{\partial \phi_k}$ 是与中心单元的距离在过滤半径范围内的一个单元 k 过滤之前的灵敏度。 ϕ_e 和 ϕ_k 分别是单元 e 和 k 的单元密度。 N 为以单元 e 为中心，过滤半径为 r_{min} 的范围内的总单元数， W_e 为权重函数， $d(e, k)$ 为单元 k 与中心单元 e 之间的距离。

经过过滤操作之后的结构边界一般比较模糊，此时会产生介于 0-1 之间的灰度单元。为了避免灰度单元的产生，我们采用投影算法对结构优化的结果进行进

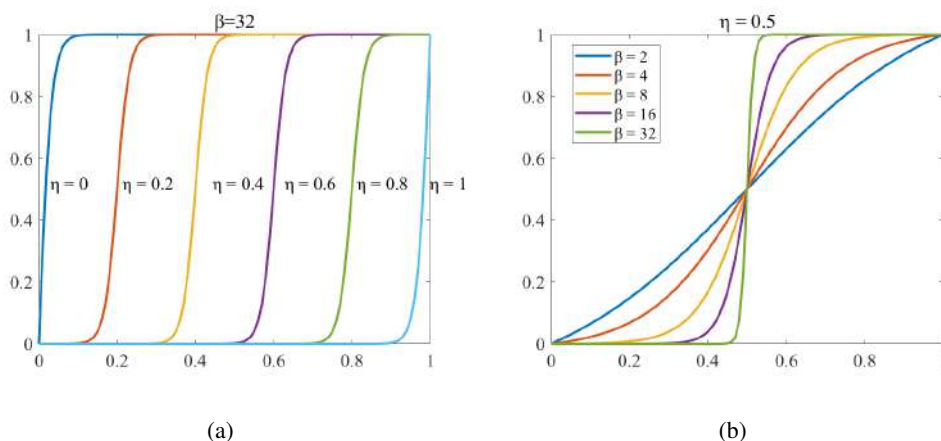


图 2.7 η 与 β 对 Heaviside 函数的影响曲线。(a) $\beta = 32$, 分析 η 的变化对结果的影响; (b) $\eta = 0.5$, 分析 β 的变化对结果的影响;

一步的惩罚。目前最常用的投影函数是 Heaviside 函数 (双曲正切函数), 其表达式如下:

$$\rho_i = H(\tilde{\phi}_i) = \frac{\tanh(\beta\tau) + \tanh(\beta(\tilde{\phi}_i - \tau))}{\tanh(\beta\tau) + \tanh(\beta(1 - \tau))}. \quad (2.36)$$

其中, β 控制了投影曲线陡峭程度, 当 β 接近无穷时, Heaviside 函数接近于阶跃函数。 β 在优化的过程中逐渐变大会加速优化过程的收敛。 τ 为投影阈值, 当单元密度小于 τ 时, 投影函数将其惩罚至 0; 当单元密度大于 τ 时, 投影函数将其惩罚至 1;

在拓扑优化的过程中会用到三个密度场即: 原始设计变量场 ϕ , 过滤 (灵敏度或密度) 场 $\tilde{\phi}$ 和物理密度 (投影) 场 ρ 。基于三个密度场的优化目前已经得到了广泛的应用。

第3章 带有应力约束的拓扑优化问题

3.1 引言

带有应力约束的拓扑优化在拓扑优化领域是一个非常重要的研究方向。目前大多数的结构优化问题的研究受体积约束，结构柔顺性约束或自振频率约束，而忽略了应力约束。然而在实际应用中，结构中的应力约束非常重要，而且应力约束与大多数的约束(体积，柔顺性，自振频率等)有着本质的区别。本章将围绕连续体结构的应力约束问题进行研究。首先介绍应力约束问题的难点与挑战，其次分别介绍基于有限元的带有应力约束的拓扑优化问题和基于等几何分析的带有应力约束的拓扑优化问题。通过数值测试说明所提算法的有效性。

3.2 应力约束问题的挑战

为了保证优化结果中所有点的应力不超过给定的阈值，在建模阶段需要考虑应力约束条件。在过去的20年内，研究学者总结了带有应力约束的拓扑优化问题的三个研究难点，它们分别是^[89-90]：

- 应力约束的局部性问题；
- 应力约束的奇异点问题(求解空间退化问题)；
- 应力约束的高度非线性问题；

本节针对这三个难点进行分析讨论并总结其研究现状。

(1) 局部性

针对一般的带有应力约束的拓扑优化问题，已知优化的设计空间及该结构所承受的最大应力，通常将区域分成若干体素或者像素。通过控制体素(像素)的顶点或者中心点的应力来约束整体区域的应力上限。因此，应力约束条件的个数取决于划分单元的个数。通常这个数量又是非常庞大的。由于约束条件数目巨大，会给优化过程中的灵敏度分析及约束条件的求解带来了非常大的困难^[91]。目前针对应力的局部性问题已经有了三类解决方法：聚合方法(aggregation techniques)，活跃集方法和增广拉格朗日方法(aggregation free)。

① 聚合方法

针对应力约束的局部性问题，通常第一步将其转化为最大值约束，即：

$$\sigma_i \leq \sigma^* \longrightarrow \max(\sigma) \leq \sigma^*.$$

其中 σ_i 表示第 i 个单元的应力， σ^* 表示设定的最大应力阈值。虽然多个约束条件通过最大值函数转化为一个约束，但是最大值函数没有梯度信息即不可微分。

因此并不适合基于梯度的优化算法。目前已经提出了一些聚合方法,其主要思想就是建立一个光滑全局函数(方便灵敏度分析)去近似最大值函数进而可以通过计算一个约束条件的灵敏度达到控制所有点应力的目的。在许多聚合方法中使用的比较普遍的有: Kreisselmeier-Steinhauser(K-S)方法^[92], p-norm方法^[91]和 p-mean方法^[91]。Duysinx和Sigmund^[91]测试了 p-norm和 p-mean方法,他们发现为了保证精确性, p的取值应该尽可能的大。然而随着 p取值的增大,优化问题会变得病态和不稳定。利用聚合方法可以产生一个光滑的全局应力约束函数,通过损失对局部应力的控制为代价大大减少了优化求解的计算量。当约束条件逐渐增多的时候,聚合函数表示局部约束条件的能力逐渐减小。为了避免这种情况的发生,一些研究学者提出分类技术(clustering techniques)。其主要思想是将设计区域划分为若干子区域,每个子区域称为一个分类器(cluster)。在每个子区域中利用 p-norm聚合方法^[89-90]。然而这种方法就会产生两个问题:如何确定分类器的个数和分类器划分的标准; Le等人^[89]的研究表明随着分类器个数的增加对局部应力的控制就越好。分类算法的结果强烈依赖于分类器个数的确定,然而又没有一个统一的分类标准。

②活跃集方法

一些研究学者提出利用活跃集方法^[93]减少计算量。在活跃集方法中,只有活跃的约束条件被进行灵敏度分析,非活跃条件不进行分析。但是这种方法不适用于大规模的连续体结构优化,随着网格细分数不断增加越来越多的应力达到活跃状态,最后在优化过程中的计算量仍然很大。

③增广拉格朗日方法

增广拉格朗日方法通过拉格朗日乘子和惩罚因子将应力约束条件放置目标函数中,从而避免了局部应力的问题并且提高了计算效率,适用于大规模拓扑优化问题。增广拉格朗日方法^[94]其主要用于求解带有等式约束条件的优化问题。后来, Rockafellar^[95]结合了 Buys^[96]的思想提出增广拉格朗日方法用于求解带有不等式约束的优化问题。其实质就是通过添加松弛变量使得不等式约束问题变成等式约束问题,再消除松弛变量从而达到优化的目的。之后,增广拉格朗日方法应用于结构分析领域并结合 SIMP模型应用于带有应力约束的拓扑优化问题中。后来, Xia等人^[97]将增广拉格朗日算法结合水平集方法应用在带有应力约束的拓扑优化问题当中。有学者将其方法称为非聚合方法(aggregation-free method)^[98]。增广拉格朗日乘子法在灵敏度分析阶段,通过伴随方法进行分析更加高效。

④算子分裂算法

由于增广拉格朗日方法的有效性,在此基础上涌现了一系列的算子分裂算法如 Douglas-Rachford算法^[99]。这类算法相比于传统的算法能够提升计算效率,

达到快速收敛的效果。但是其要求理论推导复杂导致目前没有广泛应用。

(2) 奇异性

应力约束的奇异性问题是指在算法求解的过程中，解空间出现退化现象导致算法最后收敛不到最优解的情况。在1968年，Sved和Ginos^[100]在针对杆问题的求解过程中发现奇异性现象。随后在1989年，Kirsch^[101]证明了即使对于简单的结构，拓扑优化也可能存在奇异解并且发现奇异点的特征。1992年，Cheng和Jiang首次正确描述了奇异最优解的性态，是位于可行域低维子域的端点。这是奇异解包括应力约束下拓扑优化的一个重要的标志性结论。1997年Cheng和Guo提出基于离散体结构的 ϵ -放松方法，通过数值算例印证该方法在求解奇异性问题的有效性。在2001年，Rozvany^[102]针对奇异点问题进行了详细的总结。在2008年，Achtziger和Kanzow^[103]将这种优化问题分类为带有约束消失的数学规划问题(Mathematical program with vanishing constraints, MPVCs)并且修改了约束条件。目前，应力约束的奇异性问题可以通过一些放松手段来避免比如 ϵ -放松方法^[104]和qp-放松方法^[89]。这类放松方法消除了解空间退化的现象，最优解在可行域内使得优化算法通过反复迭代可以到达。

(3) 高度非线性

应力约束问题的高度非线性主要来源于两种情况，第一种根据结构力学中应力的计算公式，等效应力的求解是应力的开平方，求解过程包含了很多非线性的公式。在数值求解的过程中，灵敏度的计算直接利用等效应力对密度求偏导会出现高度非线性问题。第二种由于应力约束问题的局部性使得在后续应力计算过程中局部转全局应力约束时产生高阶约束。在优化过程中会出现迭代震荡的问题。针对应力约束问题的高度非线性目前并没有好的解决方法。在一般的优化算法求解过程中通常利用伴随方法求解应力的灵敏度以提升计算效率。

3.3 基于有限元的带有应力约束的拓扑优化问题

本节利用有限元分析方法求解带有应力约束的拓扑优化问题，以增广拉格朗日乘子法为基础推导交替方向优化的方法。本文算法引入单元等效应力作为优化变量与单元密度变量一起交替优化。首先从传统的应力约束模型切入然后介绍本文算法的流程和灵敏度分析，其次用一个桁架实例初步验证算法的有效性，最后测试连续体结构的数值算例并分析讨论。通过与传统的求解器比较验证所提算法的有效性。

3.3.1 模型建立

(1) 传统的应力约束优化模型

将设计域用有限元分析方法离散成若干矩形单元，矩形单元的密度用向量 ρ 表示。设 σ_e 表示结构在恒定外荷载 F 作用下单元 e 的应力张量。 $\tilde{\sigma}_e$ 表示单元 e 的放松等效应力。在此，本节引入一个变量 α_e 表示单元 e 的放松等效应力即：

$$\alpha_e = \tilde{\sigma}_e. \quad (3.1)$$

传统的带有应力约束的以结构柔顺度为目标的拓扑优化模型 (Q_0) 如下：

$$(Q_0) \quad \arg \min_{\rho} \quad f_c(\rho) = F^T U(\rho), \quad (3.2)$$

$$\text{s.t.} \quad V(\rho) = \rho^T \mathbf{v} \leq \gamma V^*, \quad (3.3)$$

$$\alpha_e \leq \sigma^*, \quad \forall e, \quad (3.4)$$

$$0 \leq \rho_e \leq 1, \quad \forall e. \quad (3.5)$$

式中 $U(\rho)$ 为位移向量，公式 (3.3) 中向量 \mathbf{v} 表示每个单元上的体积， $V(\rho)$ 表示当前结构的体积， V^* 表示实体设计域的体积， γ 表示预先设定的体积分数。公式 (3.4) 表示应力约束， σ^* 表示预先设定的应力最大值。公式 (3.5) 表示每个单元的体积介于 0 到 1 之间，其中 0 表示空单元，1 表示实体单元。位移向量 $U(\rho)$ 是通过求解静力平衡方程得：

$$\mathbf{K}(\rho)U = F, \quad (3.6)$$

其中 $\mathbf{K}(\rho)$ 是整体刚度矩阵，单元刚度矩阵是通过 SIMP 模型 (2.30) 求得：

$$\mathbf{K}_e(\rho_e) = E_e(\rho_e)\mathbf{K}_0, \quad (3.7)$$

$$E_e(\rho_e) = E_{\min} + \rho_e^k(E_0 - E_{\min}), \quad (3.8)$$

其中 \mathbf{K}_0 是杨氏模量为 E_0 的实体单元的刚度矩阵。 E_e 是单元 e 插值后得到的杨氏模量。为了避免 \mathbf{K} 奇异性， E_{\min} 取为一个非常小的值 (10^{-9})。 k 是惩罚参数，一般情况 $k = 3$ 。

(2) 引入应力作为设计变量

基于上述传统的带有应力约束的拓扑优化模型，在此引入单元等效应力 α_e 作为设计变量扩充设计域从而扩大搜索范围，并施加单元等效应力的等式约束 (公式 (3.1))。在迭代优化的过程中，等式约束限制条件太强。通过拉格朗日方法将等式约束放在目标函数中，从软约束变为硬约束。增广拉格朗日目标函数为：

$$L_{\mu}(\rho, \alpha, \lambda) = f_c(\rho) + \lambda^T(\alpha - \tilde{\sigma}) + \frac{\mu}{2} \|\alpha - \tilde{\sigma}\|_2^2, \quad (3.9)$$

其中 λ 是拉格朗日乘子, μ 是拉格朗日函数的惩罚参数。那么传统的优化模型 (Q_0) 转换为优化模型 (Q_1):

$$(Q_1) : \quad \arg \min_{\rho, \alpha} \max_{\lambda} L_{\mu}(\rho, \alpha, \lambda),$$

s.t. Eqs. (3.3), (3.4) and (3.5).

增广拉格朗日公式可以通过对对偶变量集的同时优化来求解, 例如 MMA。为了有效地求解优化模型 (Q_1), 下面我们介绍一种解耦优化变量的方法。

(3) 交替优化算法

在此用到两组优化变量 (密度变量 ρ 和应力变量 α) 求解优化模型 (Q_1)。在每一步的迭代中, 增广拉格朗日函数都可以分为两个部分: 一部分以密度 ρ 为变量, 另一部分以 α 为变量。这种可分性是增广拉格朗日法的一种变形, 即交替方向选择算法 (the alternating direction method of multipliers, ADMM)。ADMM 类似于求解线性方程的高斯-塞德尔方法。这种更新方案能够有效地在扩大优化空间, 以便搜索最优解。ADMM 的迭代公式如下:

$$\rho^{[i]} = \arg \min_{\rho} L_{\mu}(\rho, \alpha^{[i-1]}, \lambda^{[i-1]}), \quad (3.10)$$

s.t. Eqs. (3.3) and (3.5).

$$\alpha^{[i]} = \arg \min_{\alpha} L_{\mu}(\rho^{[i]}, \alpha, \lambda^{[i-1]}), \quad (3.11)$$

s.t. Eq. (3.4).

式中, $\rho^{[i]}$ 和 $\alpha^{[i]}$ 表示第 i 次迭代优化结果。除此之外, 拉格朗日乘子的更新公式如下:

$$\lambda^{[i]} = \lambda^{[i-1]} + \mu(\alpha^{[i]} - \tilde{\sigma}(\rho^{[i]})). \quad (3.12)$$

针对第一个子问题 (3.10), 我们采用移动渐近线方法 (MMA) 进行优化。需要说明的是, 本文算法将应力作为优化变量并在优化过程中将最大值约束转化为边界条件, 即应力变量在 0 至 σ^* 中进行搜索。因此, 本文算法不需要聚合算法。利用 Limited Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno(L-BFGS) 算法求解这个有界约束的子问题。事实上, 公式 (3.11) 是关于 α 的二次规划问题, 可以通过如下优化问题求解:

$$\arg \min_{\alpha_e} \frac{1}{2} \left\| \alpha_e - \left(\tilde{\sigma}_e(\rho^{[i]}) - \frac{\lambda_e^{[i-1]}}{\mu} \right) \right\|_2^2. \quad (3.13)$$

考虑有界约束, 第二个子问题的解为:

$$\alpha_e = \min \left\{ \tilde{\sigma}_e(\rho^{[i]}) - \frac{\lambda_e^{[i-1]}}{\mu}, \sigma^* \right\}. \quad (3.14)$$

(4) 正则化操作

在第二章中, 我们介绍了基于密度的拓扑优化算法在优化求解的过程中会出现一些常见的问题, 如: 棋盘格问题, 灰度区域问题。在此, 我们利用密度过滤算法中的平滑算子来避免棋盘图案 (即 0-1 交替的区域) 和 Heaviside 算子来避免灰度区域的产生^[105-106]。在此我们引入一个新的设计变量 $\phi \in [0, 1]$ 。对 ϕ 运用过滤算法 (公式 (2.32))。对密度进行过滤操作之后, 利用第二章提到的 Heaviside 投影算子 (公式 (2.36)), 其中 β 控制了曲线的陡峭程度, η 是投影阈值 (在此 $\eta = 0.5$)。为了保证数值稳定性, 初始 $\beta = 1$ 且每 50 次将 β 翻倍。

(5) 应力操作

我们采用 qp-松弛方法^[89]来解决优化迭代过程中应力约束的奇异性问题。每个单元应力用下列方法计算:

$$\tilde{\sigma}_e = \rho_e^q \bar{\sigma}_e, \quad (3.15)$$

其中 q 是放松参数 (在此, 取 $q = 0.5$)。 $\bar{\sigma}_e$ 表示单元 e 的等效应力, 定义为:

$$\bar{\sigma}_e = (\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{V} \boldsymbol{\sigma}_e)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.16)$$

其中 \mathbf{V} 是对称矩阵

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

并且 $\boldsymbol{\sigma}_e$ 是应力张量的 Voigt 表示,

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e. \quad (3.18)$$

其中, \mathbf{D}_0 是实体单元的应力张量, \mathbf{B}_e 是弹性位移矩阵, \mathbf{u}_e 是单元 e 的位移向量。

3.3.2 灵敏度分析

在此给出目标函数 $L_\mu(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$ 关于密度变量 (ϕ_e) 和应力变量 (α_e) 的灵敏度分析。 $\frac{\partial L_\mu(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \phi_e} \left(\frac{\partial L_\mu}{\partial \phi_e} \right)$ 和 $\frac{\partial L_\mu(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial \alpha_e} \left(\frac{\partial L_\mu}{\partial \alpha_e} \right)$ 的计算公式为:

$$\frac{\partial L_\mu}{\partial \phi_e} = \frac{\partial f_c(\boldsymbol{\rho})}{\partial \phi_e} - \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \phi_e} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \phi_e}. \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial L_\mu}{\partial \alpha_e} = \boldsymbol{\lambda}^T + \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T. \quad (3.20)$$

(1) 放松等效应力对密度的灵敏度分析

针对单元 i , $\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \phi_e}$ 计算如下:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \phi_e} = \sum_{j \in S_e} \frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial \tilde{\phi}_j} \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial \phi_e}. \quad (3.21)$$

$\frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial \phi_e}$ 和 $\frac{\partial \rho_j}{\partial \tilde{\phi}_j}$ 通过公式 (2.32) 和 (2.36) 计算得到:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial \phi_e} = \frac{\omega_j(x_e, r)v_e}{\sum_{i \in S_j} \omega_j(x_i, r)v_i}, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial \tilde{\phi}_j} = \beta \frac{1 - \tanh^2(\beta(\eta - \tilde{\phi}_j))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}. \quad (3.23)$$

通过公式 (3.15) 应力 $\tilde{\sigma}_e$ 的定义, 导数 $\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \rho_j}$ 分为以下两种情况:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \rho_j} = \begin{cases} \rho_i^q \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j}, & i \neq j, \\ q\rho_i^{q-1} \tilde{\sigma}_i + \rho_i^q \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j}, & i = j. \end{cases} \quad (3.24)$$

(2) 等效应力灵敏度分析

等效应力 $\tilde{\sigma}_i$ 通过应力张量 $\sigma_i = [\sigma_{i,x}, \sigma_{i,y}, \tau_{i,xy}]^T$ 计算而得, 故等效应力关于应力的灵敏度如下:

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_i} = \left[\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_{i,x}}, \frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_{i,y}}, \frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \tau_{i,xy}} \right]^T, \quad (3.25)$$

其中

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_{i,x}} = \frac{1}{2\tilde{\sigma}_i} (2\sigma_{i,x} - \sigma_{i,y}), \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_{i,y}} = \frac{1}{2\tilde{\sigma}_i} (2\sigma_{i,y} - \sigma_{i,x}), \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \tau_{i,xy}} = \frac{3\tau_{i,xy}}{\tilde{\sigma}_i}. \quad (3.28)$$

(3) 应力灵敏度分析

从应力公式 (3.18) 可得关于应力的灵敏度为:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j} = \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_c \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \rho_j}. \quad (3.29)$$

位移关于密度的灵敏度可通过求解静力平衡方程 3.6 得到:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{U} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \rho_j} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \rho_j}. \quad (3.30)$$

代入公式 (3.29) 可得:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \rho_j} = -\mathbf{D}_0 \mathbf{B}_c (\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{U})_i, \quad (3.31)$$

其中符号 $()_i$ 表示提取与单元 i 自由度相对应的项。利用伴随方法用于求解公式 (3.31)。公式 (3.19) 第二项 $\lambda^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \phi_e}$ 可写作:

$$(\lambda + \mu(\alpha - \sigma))^T \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \phi_e} = \sum_{i=1}^N (\lambda_i + \mu(\alpha_i - \sigma_i)) \frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \phi_e}, \quad (3.32)$$

$$= \sum_{j \in \mathcal{S}_e} \left(\sum_{i=1}^N (\lambda_i + \mu(\alpha_i - \sigma_i)) \frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \rho_j} \right) \frac{\partial \rho_j}{\partial \tilde{\phi}_j} \frac{\partial \tilde{\phi}_j}{\partial \phi_e}. \quad (3.33)$$

令 Θ_j 表示 $\sum_{i=1}^N (\lambda_i + \mu(\alpha_i - \sigma_i)) \frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \rho_j}$ 。将公式 (3.29) 代入公式 (3.24) 我们可得:

$$\Theta_j = \sum_{i=1}^N (\lambda_i + \mu(\alpha_i - \tilde{\sigma}_i)) \rho_i^q \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_i} \right)^T \mathbf{D}_0 \mathbf{B}_c \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \rho_j} \quad (3.34)$$

$$+ (\lambda_j + \mu(\alpha_j - \tilde{\sigma}_j)) q \rho_j^{q-1} \tilde{\sigma}_j, \quad (3.35)$$

其中 $\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial \rho_j} = (-\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_j} \mathbf{U})_i$ 。在此引入伴随向量 δ 并且求解

$$\mathbf{K} \delta = -\mathbf{A}_{i=1}^N (\lambda_i + \mu(\alpha_i - \tilde{\sigma}_i)) \rho_i^q \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_0^T \left(\frac{\partial \tilde{\sigma}_i}{\partial \sigma_i} \right), \quad (3.36)$$

其中 \mathbf{A} 表示装配矩阵, 公式 (3.35) 由以下公式计算:

$$\Theta_j = \delta_j^T \frac{\partial \mathbf{K}_j}{\partial \rho_j} \mathbf{u}_j + (\lambda_j + \mu(\alpha_j - \tilde{\sigma}_j)) q \rho_j^{q-1} \tilde{\sigma}_j, \quad (3.37)$$

其中向量 δ_j 从伴随向量 δ 通过单元 j 对应项进行提取。

3.3.3 结果分析与讨论

本文算法在 MATLAB 2018b 编程平台上实现, 其配置环境为 Inter(R) Xeon(R) W-2123 CPU 3.60GHz 64GB RAM。材料杨氏模量为 $E = 1.0$, 泊松比为 $\nu = 0.3$ 。应力分析采用双线性单元的有限元分析方法。通过数值算例测试, 将本文算法与传统求解方法即移动渐近线优化方法 (MMA), 全局移动渐近线优化方法 (GCMMA) 及其混合算法 (GCMMA-MMA) 进行对比测试证实所提算法的有效性。迭代终止准则为连续迭代中设计变量的最大变化小于给定阈值 $\epsilon = 10^{-2}$ 且同时满足体积和应力约束, 或达到最大迭代次数 (1000)。对于测试的优化算法, 所有的例子都使用相同的参数, 这些参数是根据 L 形梁的多次试验经验选择的。MMA 中重要的参数包括 *move*, *asyincr* 和 *asydecr*。根据测试, 选择 *move* = 0.1, *asyincr* = 1.2 和 *asydecr* = 0.7。

(1) 参数讨论

增广拉格朗日函数包括两个参数: 拉格朗日乘子 λ 和惩罚参数 μ 。这两个参数有效地控制 α 与 $\tilde{\sigma}$ 之间的差异。为了保证算法的收敛, 在初始迭代阶段 λ 与 μ

的值不宜过大，因此一开始迭代的过程优先优化柔度值。在此，本文选择 $\lambda_c = 1$ 和 $\mu = 0.5$ 。基于这样的参数选取，柔度值 ($f_c(\rho)$) 占了目标函数 ($L_\mu(\rho, \alpha, \lambda)$) 的 99.9% 以上。为了满足应力约束条件，算法每 5 次迭代后将 μ 乘以 1.05，即逐步增加应力约束的惩罚权重。

在算法 ADMM (Q_1) + MMA (Q_0) 中，执行固定次数的 ADMM 迭代。初始迭代次数的选取依据不同算例的迭代结果稳定性。我们使用相邻五次迭代的相对标准偏差 (RSD) 作为评估稳定性的指标，

$$RSD = \left(\frac{1}{4} \sum_{i=j-2}^{j+2} (f_i - \bar{f}_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}} / \bar{f}_j, \quad j > 2, \quad (3.38)$$

其中 $\bar{f}_j = \frac{1}{5} \sum_{i=j-2}^{j+2} f_i$ 。从大量的测试中，我们发现需要 12 到 25 次迭代才能使相对标准偏差小于 0.2%。因此，在对连续体进行应力优化过程中，我们选择运行 20 次 ADMM 迭代。首先将本文算法在杆结构上进行测试，其次在连续体结构上进行测试。

(2) 杆结构问题的测试

为了可视化新优化模型 (Q_1) 的迭代收敛过程，我们设计了两根杆结构的受力问题并针对该情况进行数值测试。图 3.1 表示两根杆的优化问题。一个垂直的外力施加在点 O 处。两杆关于水平线的夹角分别为 $a = 45^\circ$ 和 $b = 30^\circ$ 。通过分析点 O 处的平衡状态方程，应力的表达式如下：

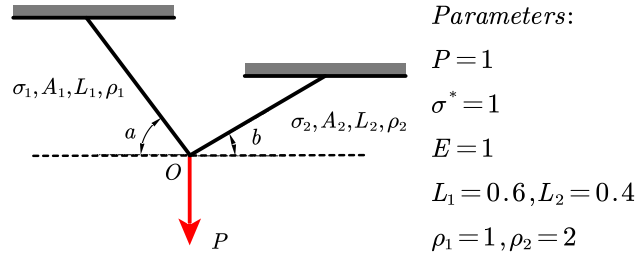


图 3.1 两根杆的优化问题。在应力约束 σ^* 下，优化的目标是杆的总体重量，优化变量为两杆的横截面积 A_1 和 A_2 。

$$\sigma_1 = \frac{P \cos(b)}{A_1 \sin(a+b)}, \quad \sigma_2 = \frac{P \cos(a)}{A_2 \sin(a+b)}. \quad (3.39)$$

$$(P_0) : \quad \min \quad m(\mathbf{A}) = \rho_1 A_1 L_1 + \rho_2 A_2 L_2, \quad (3.40)$$

$$\text{s.t.} \quad |\sigma_j| \leq \sigma^*, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (3.41)$$

$$0 < A_j \leq A^*, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (3.42)$$

在此引入辅助变量 $\alpha_j = \sigma_j$ 并将目标函数转化为增广拉格朗日函数：

$$L_\mu(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}) = m(\mathbf{A}) + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\sigma}) + \frac{\mu}{2}\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\sigma}\|^2, \quad (3.43)$$

构造新的优化问题：

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) : \quad & \min_{\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}} L_\mu(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}), \\ & \text{s.t. } \text{Eqs. (3.41) and (3.42)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

那么，ADMM 求解以下两个子问题：

$$\mathbf{A}^{[i]} = \arg \min_{\mathbf{A}} L_\mu(\mathbf{A}, \boldsymbol{\alpha}^{[i-1]}, \boldsymbol{\lambda}^{[i-1]}), \quad (3.45)$$

s.t. Eq. (3.42).

$$\boldsymbol{\alpha}^{[i]} = \arg \min_{\boldsymbol{\alpha}} L_\mu(\mathbf{A}^{[i]}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda}^{[i-1]}), \quad (3.46)$$

s.t. Eq. (3.41).

增广拉格朗日乘子更新公式如下：

$$\boldsymbol{\lambda}^{[i]} = \boldsymbol{\lambda}^{[i-1]} + \mu(\boldsymbol{\alpha}^{[i]} - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{A}^{[i]})). \quad (3.47)$$

其中， $\mathbf{A}^{[i]}$ 、 $\boldsymbol{\alpha}^{[i]}$ 和 $\boldsymbol{\lambda}^{[i]}$ 表示第 i 步迭代的横截面积，应力，增广拉格朗日乘子。

图 3.2(a) 说明了原始模型 (\mathcal{P}_0) 的求解空间。可行域由浅粉色矩形表示。灰线是目标函数的等高线。本例中的全局最优值位于 G 点 (0.8966, 0.7321)。对于所有的算法， A_1 和 A_2 的初始值都等于 $A^* = 2$ 对应于点 E 。当设计变量的最大变化小于 10^{-5} 时，优化终止。我们比较求解优化问题的五个算法：针对原始模型 (\mathcal{P}_0) 的 MMA 和 GCMMA 算法，针对改进模型 (\mathcal{P}_1) 的 MMA 和 ADMM 算法和混和求解算法即：ADMM 求解模型 (\mathcal{P}_1) 和 MMA 求解模型 (\mathcal{P}_0)。在此，本文设置 $\lambda = 0.1$ 和 $\mu = 0.5$ 。

	MMA (\mathcal{P}_0)	GCMMA (\mathcal{P}_0)	MMA (\mathcal{P}_1)	ADMM (\mathcal{P}_1)	ADMM (\mathcal{P}_1) + MMA (\mathcal{P}_0)
Mass $m(\mathbf{A})$	1.1236	1.1236	1.1236	1.1236	1.1236
Time (s)	0.858	0.770	1.312	2.389	0.623
#Iterations	62	32	110	46	5+6

表 3.1 两根杆优化问题的数据统计。

从图 3.2 可以看出，五种算法最后都收敛于全局最优点 G 。绿色线段表示算法的迭代过程，所有的算法都是从点 E 出发最后收敛到点 G 。这与表 3.1 的最终结果一致，目标函数值是 1.1236。在 ADMM 求解的过程中可行解的迭代超出了可行区域 (图 3.2e)。因为等式约束 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\sigma}$ 在目标中被转化为惩罚项，因此在迭代

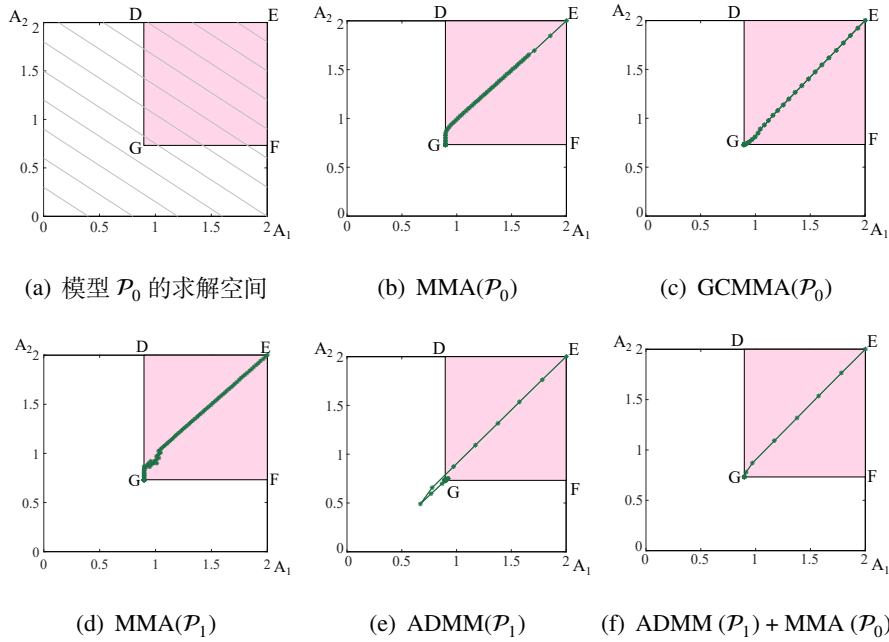


图 3.2 (a) 传统模型 \mathcal{P}_0 的求解空间 ($DEFG$); (b) 和 (c) 利用 MMA 和 GCMMA 求解模型 (\mathcal{P}_0) 的迭代过程; (d) 和 (e) 利用 MMA 和 ADMM 求解模型 (\mathcal{P}_1) 的迭代过程; (f) 利用 ADMM 求解模型 (\mathcal{P}_1) 和 MMA 求解 (\mathcal{P}_0) 的迭代过程。对于所有的算法, 迭代初始值为 $E(2, 2)$ 且最终都收敛于全局最优点 $G(0.8966, 0.7321)$ 。

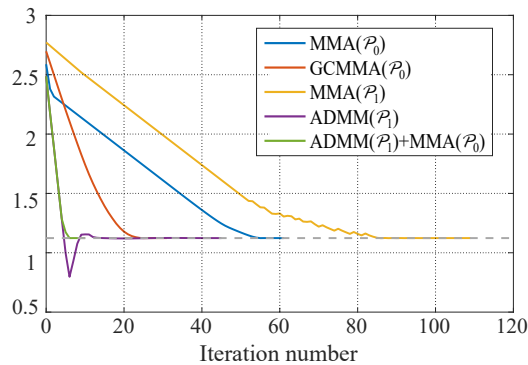


图 3.3 目标函数迭代收敛曲线。

过程中并没有严格执行应力约束。当迭代过程收敛时, 等式条件和应力约束都得到满足。

目标函数迭代收敛曲线见图 3.3。ADMM 能够在最初的几次迭代中快速减少目标函数的值。当它接近最优解时, 迭代缓慢。ADMM 的迭代过程及收敛特性已经被广泛讨论^[107], 但是并没有应用在带有应力约束的拓扑优化领域当中。鉴于此, 本文充分利用 ADMM 的优势 (初始阶段的快速下降) 与其他算法 (迭代后期快速收敛) 结合构建一种混合算法。所有算法的计算时间汇总在表 3.1 中。表 3.1 表明, $ADMM(\mathcal{P}_1) + MMA(\mathcal{P}_0)$ 混合方法在迭代次数和计算时间方面是最优的。

(3) L 形结构数值测试

本文给出连续体结构优化的算例如图 3.4(左) 所示的 L 形梁。设计域为 L 形结构 $DH = DW = 150$, $Dh = Dw = 90$ 。设计域的上侧是固定的, L 形的右侧施加向下的外力 ($F = 1$), 该外力作用在水平方向 4 个单元的顶点上。图 3.4(右) 展示了无应力约束最小柔性优化结构在体积比 $\gamma = 0.3$ 下的 vonMises 应力分布。该结构在转角处出现应力集中现象。最大应力是 1.35。在应力约束优化测试中, 我们设置应力极限为 $\sigma^* = 0.5$ 。

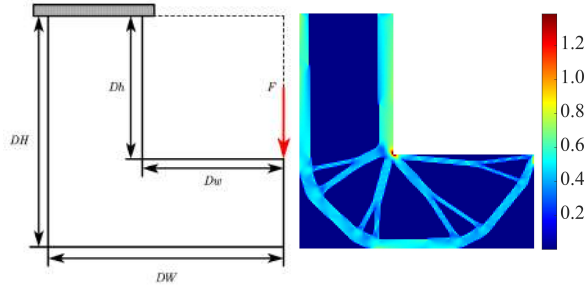


图 3.4 L 形结构设计域 (左) 和无应力约束的优化结果的 von Mises 应力分布图 (右)。

	MMA (Q_0)	GCMMA (Q_0)	GCMMA (Q_0) + MMA (Q_0)	MMA (Q_1)	ADMM (Q_1)	ADMM (Q_1) + MMA (Q_0)
f_c	301.53	296.61	295.91	292.86	281.99	284.93
V	0.29999	0.29803	0.29999	0.29993	0.29916	0.29982
$\max(\tilde{\sigma})$	0.49921	0.49933	0.49999	0.49640	0.49999	0.49664
Time(s)	759.6	1464.6	2549.0	1006.8	2473.0	894.3
#Iterations	312	203	20+811	476	464	20+376
#Solves	624	1542	1742	952	1686	872

表 3.2 L 形结构的最小柔度优化的数据统计。 f_c 表示目标函数值, V 表示体积百分比, $\max(\tilde{\sigma})$ 表示真实的最大应力, Time 表示优化时间, #Iterations 表示迭代次数, #Solves 表示线性方程组的求解个数, 包括求解平衡方程和伴随方程。

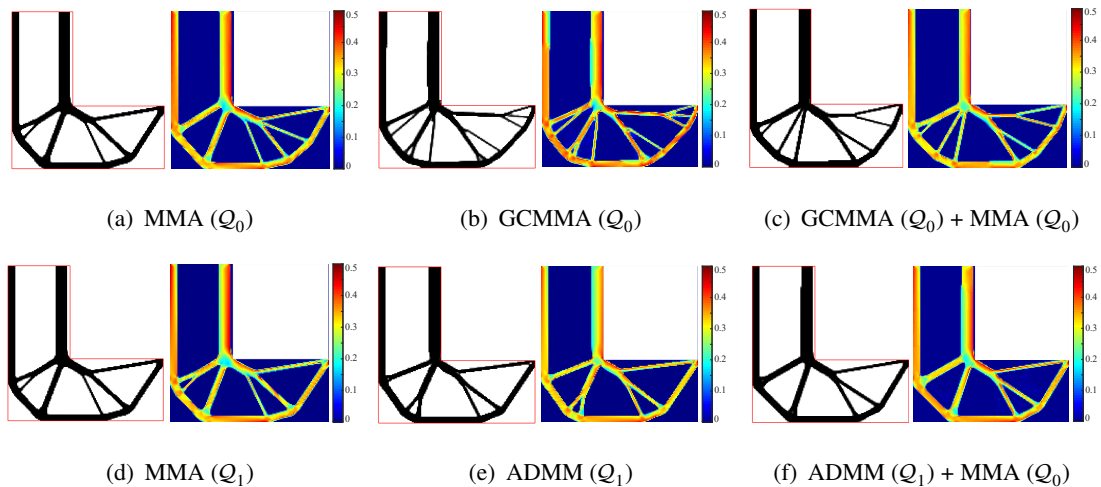


图 3.5 采用不同的优化方法的 L 形梁的优化结果和应力分布。

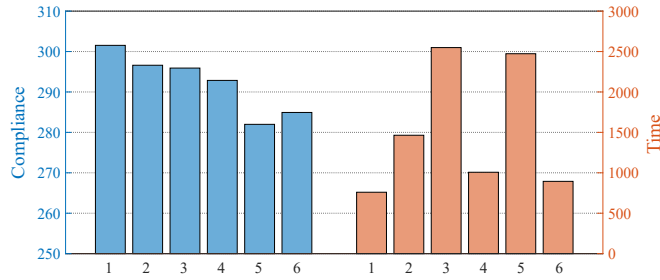


图 3.6 L 形梁的目标值和计算时间的条形图。数字 1 到 6 代表了不同的求解算法。

表 3.2 展示了不同算法的数据统计结果。根据优化模型，将求解方法分为两类： Q_0 和 Q_1 。两类求解方法的约束条件为总体积 V 、最大应力 $\max(\tilde{\sigma})$ 。在此统计优化算法的目标函数值和计算时间，并将其展示在图 3.6 中。在针对模型 (Q_0) 的优化结果中，GCMMA 比 MMA (296.61 vs 301.53) 的目标函数值更小，代价是更长的计算时间 (1464.6s vs 759.6s)。GCMMA 比 MMA 需要更少的迭代次数。GCMMA 涉及到一个需要求解平衡方程的内循环。这样的情况会增加计算时间减少迭代次数 (单次循环的计算时间增长)。

针对目标函数值来说，求解改进后的模型 (Q_1) 目标函数比求解传统模型 (Q_0) 的目标函数值小。其主要是因为改进后的优化模型，将应力约束转化为目标函数中的正则项，扩大了搜索空间。ADMM(Q_1) 的目标函数值为 281.99，比 MMA(Q_0) 的目标函数值小 6.48%。在最后一列中，混合方法的目标函数值稍大，但是减少了总计算时间。总计算时间相比于于 MMA (Q_0) 减少了 25.0%。

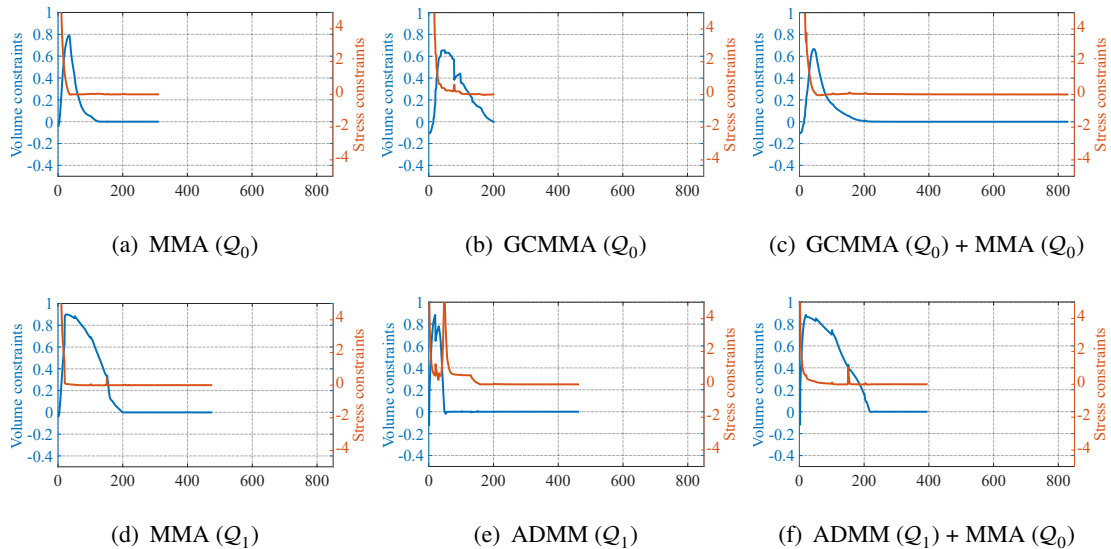


图 3.7 六种算法在优化 L 形结构时体积与应力约束的收敛图 ($\max(\tilde{\sigma}) - \sigma^*$)。

图 3.7 绘制了体积和应力约束 ($\max(\tilde{\sigma}) - \sigma^*$) 的迭代收敛曲线。研究发现，ADMM 能够在不到 50 次迭代的情况下快速满足体积约束。随着优化过程中惩罚项的增加，应力约束逐渐得到满足。一般而言，MMA 的波动比 ADMM 小。混合

方法 (ADMM(Q_1) + MMA(Q_0)) 综合了 ADMM 在初始阶段快速下降和 MMA 在后续阶段迭代稳定的特点。

(4) 阶梯形结构数值测试

针对连续体结构的应力测试, 我们设计了图 3.8(左) 所示的阶梯状结构。阶梯形设计域的相关尺寸为 $DH = DW = 150$ 和 $Dh = Dw = 50$ 。一个垂直的力被施加在设计域右上方。利用有限元进行离散, 力 F 作用在右上方相邻的四个单元的顶点。图 3.8(右) 为在没有应力约束的情况下柔度最小化的优化结果的 von Mises 应力分布, 其体积比为 $\gamma = 0.25$ 。图 3.8(右) 可以观察到分布在阶梯形拐点的三个应力集中区域, 其 von Mises 应力的最大值是 1.16。在这个例子中, 我们测试了三个应力限制: $\sigma^* \in \{0.6, 0.7, 0.8\}$ 。

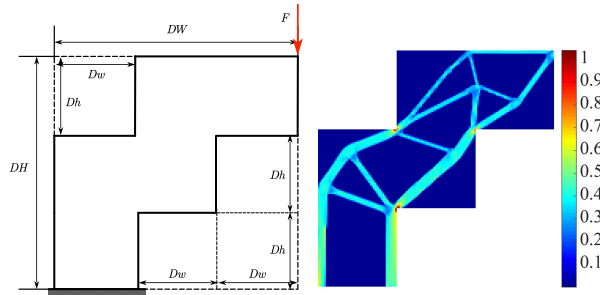


图 3.8 阶梯形结构的设计域(左)和无应力约束的优化结果的 von Mises 应力分布图(右)。

表 3.3 总结了阶梯结构测试数据。在所有情况下, 体积和最大应力的约束都得到满足。表 3.3 中的结果表示随着最大应力阈值增大, 目标值逐渐减小。这种趋势可以从条形图 3.9 中更好地显示出来。然而, 不同应力约束的计算时间没有明确的规律。通过比较六种算法的最终结果, 我们可以发现增广拉格朗日公式一般得到较小的柔度值。ADMM(Q_1) 相比于 MMA (Q_0) 的柔度减少了 8.78% ($\sigma^* = 0.6$)、7.73% ($\sigma^* = 0.7$) 和 3.16% ($\sigma^* = 0.8$), 而混合优化算法 ADMM (Q_1) + MMA (Q_0) 的柔度值分别减少 7.06% ($\sigma^* = 0.6$)、6.44% ($\sigma^* = 0.7$) 和 4.57% ($\sigma^* = 0.8$)。这个目标结果的减少与前面例子的结果是一致的。在这些数值测试中, 混合方法比 MMA (Q_0) 减少了计算时间。

值得注意的是, GCMMA 对不同的应力阈值约束条件很敏感。当应力极限变得更小时, 在默认设置下进行 1000 次迭代后, 约束条件并不满足。为了获得满意的优化结果, 需要对 GCMMA 中的一个参数进行了修改。GCMMA 同 MMA 的原理类似, 利用线性函数(近似函数)逼近非线性函数。在每一个外部循环中需要判断近似函数的逼近程度以决定是否进入内部循环。内部迭代次数越多, 近似函数越接近原函数。当内部循环次数越多, 应力约束条件就越容易满足。图 3.10 为 $\sigma^* = 0.6$ 时, 使用不同算法的优化结构和应力分布。六种算法的优化结果总体布局相似, 都可避免应力集中现象。优化结果在急转弯区域都被优化成平滑结构。

	factor	MMA (Q_0)	GCMMA (Q_0)	GCMMA (Q_0) + MMA (Q_0)	MMA (Q_1)	ADMM (Q_1)	ADMM (Q_1) + MMA (Q_0)
$\sigma^* = 0.6$	f_c	421.77	416.40	402.81	394.01	384.74	391.99
	V	0.25000	0.24994	0.24999	0.25000	0.24999	0.24999
	$\max(\delta)$	0.59949	0.59997	0.59965	0.59997	0.59907	0.59992
	Time (s)	2088.8	3853.1	2309.0	2426.1	2896.8	1798.6
	#Iterations	826	553	20+674	894	684	20+533
	#Solves	1652	2993	1728	1788	2204	1166
	$\sigma^* = 0.7$	f_c	403.13	388.49	374.83	389.26	371.98
V		0.24998	0.24992	0.24996	0.24999	0.24965	0.24950
$\max(\delta)$		0.69999	0.69992	0.69993	0.69919	0.69990	0.69941
Time (s)		1808.0	3970.3	2652.1	1957.6	2690.1	1677.3
#Iterations		595	576	20+531	642	585	20+521
#Solves		1190	2892	1182	1284	1956	1134
$\sigma^* = 0.8$		f_c	379.81	387.86	372.40	371.31	367.81
	V	0.24999	0.24996	0.24992	0.24988	0.24999	0.24998
	$\max(\delta)$	0.80000	0.80000	0.80000	0.80000	0.79999	0.80000
	Time (s)	1964.8	3744.5	2748.5	3300.4	3032.0	2049.8
	#Iterations	672	511	20+614	621	612	20+563
	#Solves	1344	2770	1308	1242	2450	1206

表 3.3 三种不同应力阈值下阶梯结构优化的数据统计。 f_c 表示目标函数值， V 表示体积百分比， $\max(\delta)$ 表示真实的最大应力，Time 表示优化时间，#Iterations 表示迭代次数，#Solves 表示线性方程组的求解个数，包括求解平衡方程和伴随方程。

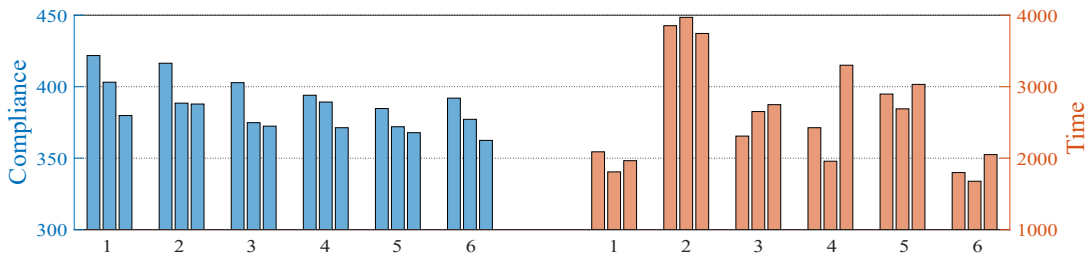


图 3.9 阶梯形结构的目标值和计算时间的条形图。数字 1 到 6 表示不同的解决方案策略，即：MMA (Q_0), GCMMA (Q_0), GCMMA (Q_0)+MMA (Q_0), MMA (Q_1), ADMM (Q_1), ADMM (Q_1)+MMA (Q_0)。从左到右的柱形表示递增的应力阈值 0.6、0.7 和 0.8。

3.4 基于等几何分析的带有应力约束的拓扑优化问题

目前，等几何分析方法已经应用在结构优化领域。相比于有限元方法，其计算精度和效率更高。基于等几何分析的结构优化的过程独立于初始的 CAD 几何模型，省去了繁琐而费时的模型转换与交互的过程。几何模型和分析模型采用统一的表示方法为直接利用 CAD 信息进行分析和优化奠定了基础。在通常的优化问题中，样条基函数的控制点信息可以作为结构优化的设计变量。第二章给出 B 样条基函数的基本定义。B 样条基函数具有单位剖分性，非负性和凸包性等特

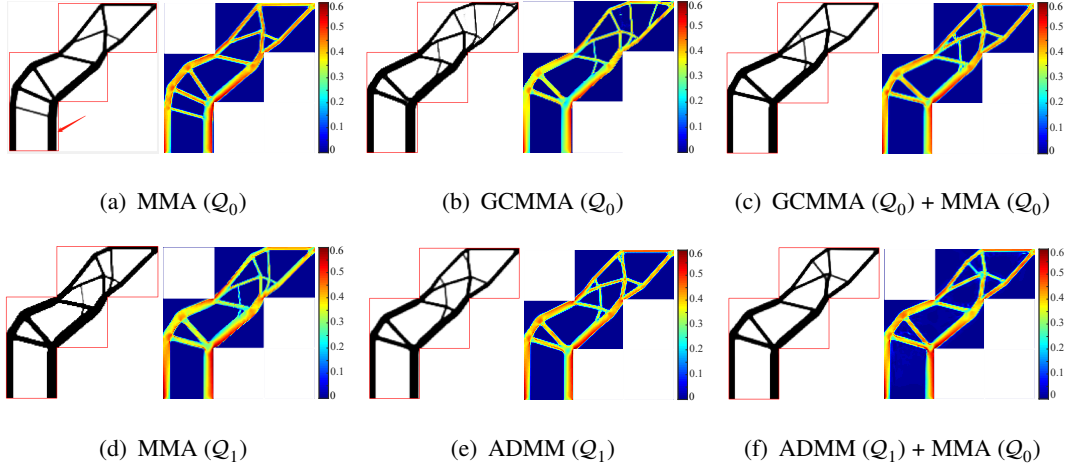


图 3.10 应力阈值 $\sigma^* = 0.6$ 时，采用不同的优化方法的阶梯形结构的优化结果和应力分布。

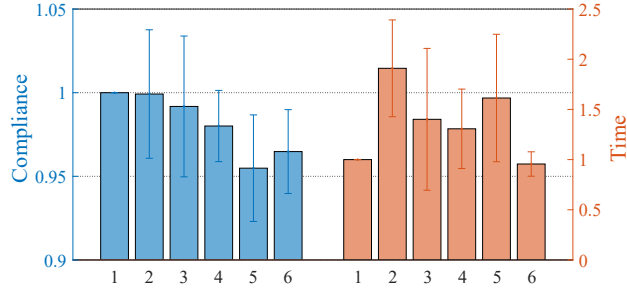


图 3.11 不同算法测试的 10 个例子的平均值和标准偏差比较。数字 1 到 6 代表不同的算法，即：MMA (Q_0), GCMMA (Q_0), GCMMA (Q_0)+MMA (Q_0), MMA (Q_1), ADMM (Q_1), ADMM (Q_1)+MMA (Q_0)。

点。这些优良特性使得基于等几何分析的优化设计过程更加高效、稳定以获取更好的优化结果。在本节，我们将上节所述算法结合等几何分析工具对带有应力约束的连续体结构进行进一步的优化。

3.4.1 模型建立

一般来说，工程结构优化问题通常采用两种优化的数学模型。第一种模型以柔度 (compliance) 为目标函数，第二种模型以体积 (mass) 为目标函数。本文采用第二种优化模型。因此，拓扑优化问题可以用数学方法表述为：

$$(\mathcal{Z}_0) \quad \min V(\rho_{i,j}) = \sum_{e=1}^{N_e} \rho_e v_e, \quad (3.48)$$

$$\text{s.t. } Ku = f, \quad (3.49)$$

$$\max(\sigma_a^{VM}) \leq \sigma^*, \quad a = 1, 2, \dots, N_a, \quad (3.50)$$

$$0 < \rho_{min} \leq \rho_{i,j} \leq 1. \quad (3.51)$$

式中, 公式 (3.48) 表示结构体积函数。 $\rho_{i,j}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 是控制顶点 $P_{i,j}$ 处的密度变量。 ρ_e ($e = 1, 2, \dots, N_e$) 是第 e 个单元的密度值, N_e 是单元个数。 ρ_e 是由 NURBS 基函数插值得到的。 $\rho_{i,j}$ 与 ρ_e 的关系可以通过公式 (2.19) 计算得到。 v_e ($e = 1, 2, \dots, N_e$) 是第 e 个单元的体积。公式 (3.49) 称为平衡方程。 K 表示刚度矩阵。 $u_{i,j}$ 表示控制顶点 $P_{i,j}$ 处的位移, f 是外力。公式 (3.50) 是应力约束条件。我们计算在高斯点 P_a ($a = 1, 2, \dots, N_a$) 的积分。 N_a 是高斯点的个数。本文依旧采用 P-norm 格式去近似最大应力 $\max(\sigma_a^{VM})$ 。 σ^* 表示预定最大应力值。本文采用 Liu 等人^[79] 提出的基于等几何分析的结构优化方法并结合 STM 稳定格式去避免迭代过程中的震荡问题。P-norm 格式的应力函数表示如下:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}^{Pnorm} &= c\dot{\sigma}^{Pnorm} = \max(\sigma_a^{VM}), \\ \sigma^{Pnorm} &= \left(\sum_{a=1}^{N_a} (\sigma_a^{VM})^p \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

公式 (3.51) 是优化变量的边界约束, 它将离散变量 0 或 1 转化为 0 到 1 之间的连续变量。 ρ_{min} 是一个非常小的正值。本文设置 $\rho_{min} = 0.001$ 来避免刚度矩阵的奇异性问题。

我们首先介绍了用 ADMM 算法以得到初始可行点。我们将原问题 (Z_0) 利用增广拉格朗日乘子法中增广拉格朗日乘子 λ 和惩罚参数 η 将不等式约束与等式约束加入目标函数当中。应力约束通过惩罚函数转化成 $\mu(\sigma^{VM} - \max(\sigma_a^{VM}))$:

$$L(\rho, \sigma^{VM}, \lambda) = \sum \rho_e v_e + \mu(\sigma^{VM} - \max(\sigma_a^{VM})) + \lambda^T (\sigma^{VM} - g(\rho)) + \frac{\eta}{2} \|\sigma^{VM} - g(\rho)\|^2, \quad (3.52)$$

式中, ρ_e 和 $\rho_{i,j}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 是在 0 到 1 之间的密度变量。惩罚函数 $\mu(x)$ 的一般形式为:

$$\mu(x) = \begin{cases} \infty, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

$\mu(x)$ 的不连续性 (阶跃性变化) 会导致迭代不稳定。本文中, 我们采用 $\mu(x) = c_1 \cdot x^{c_2}$ 作为惩罚函数。应力的计算包括了平衡方程 $Ku = f$ 的计算, 故在此我们省去平衡方程这个等式约束条件。等效应力 $\sigma^{VM} = \{\sigma_1^{VM}, \sigma_2^{VM}, \dots, \sigma_{N_a}^{VM}\}$ 。本文利用 $g(\rho)$ 去近似 σ^{VM} , 其计算公式如下:

$$g(\rho_{i,j}) = (D(\rho_{i,j}) \cdot B_a \cdot D(\rho_{i,j})^T V (D(\rho_{i,j}) \cdot B_a \cdot D(\rho_{i,j})^T)^T, \quad (3.53)$$

其中, $D(\rho) = \rho^k D_0$ 。 D_0 是弹性矩阵。 B_a 是在一个单元上的位移向量。在本文中, 我们设定 $\lambda_k = 0.001$ ($k = 1, 2, \dots, N_a$), $\eta = 0.001$, $c_1 = 100000$, $c_2 = 5$ 。

在公式 (3.52) 中, 我们将控制点处的密度 $\rho_{i,j}$ 和等效应力 σ_a 分别作为两个自变量进行优化, 以得到最终结果。这两组变量通过公式 (3.53) 建立联系。我们

将优化模型转化为两阶段优化的子问题。第一阶段是控制点 P_{ij} 处的密度 ρ_{ij} 优化，第二阶段是等效应力 σ_a 优化，最后更新拉格朗日乘子 λ 。优化公式如下：

$$L(\rho) = \sum \rho_e v_e + \lambda^T ((\sigma^{VM})^{k+1} - g(\rho)) + \frac{\eta}{2} \|\sigma^{VM} - g(\rho)\|^2, \quad (3.54)$$

$$L(\sigma^{VM}) = \mu(\sigma^{VM} - \max(\sigma_a^{VM})) + \lambda^T (\sigma^{VM} - g(\rho^{k+1})) + \frac{\eta}{2} \|\sigma^{VM} - g(\rho^{k+1})\|^2, \quad (3.55)$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \eta((\sigma^{VM})^{k+1} - g(\rho^{k+1})). \quad (3.56)$$

基于上述优化子问题，ADMM 算法的基本形式为：

$$\rho^{k+1} = \operatorname{argmin} L_\rho(\rho, \sigma^{VM^k}, \lambda^k), \quad (3.57)$$

$$\sigma^{VM^{k+1}} = \operatorname{argmin} L_a(\rho^{k+1}, \sigma^{VM}, \lambda^k), \quad (3.58)$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + a(\sigma^{k+1} - g(\rho^{k+1})). \quad (3.59)$$

通过对密度 ρ 和等效应力 σ^{VM} 的快速迭代得到可行点。实验结果表明，迭代过程的初始阶段快速下降。需要注意的是，由于问题的高度非线性性质，在迭代过程中振荡不可避免的。基于等几何分析的带有应力约束的拓扑优化算法流程如图 3.12 所示：

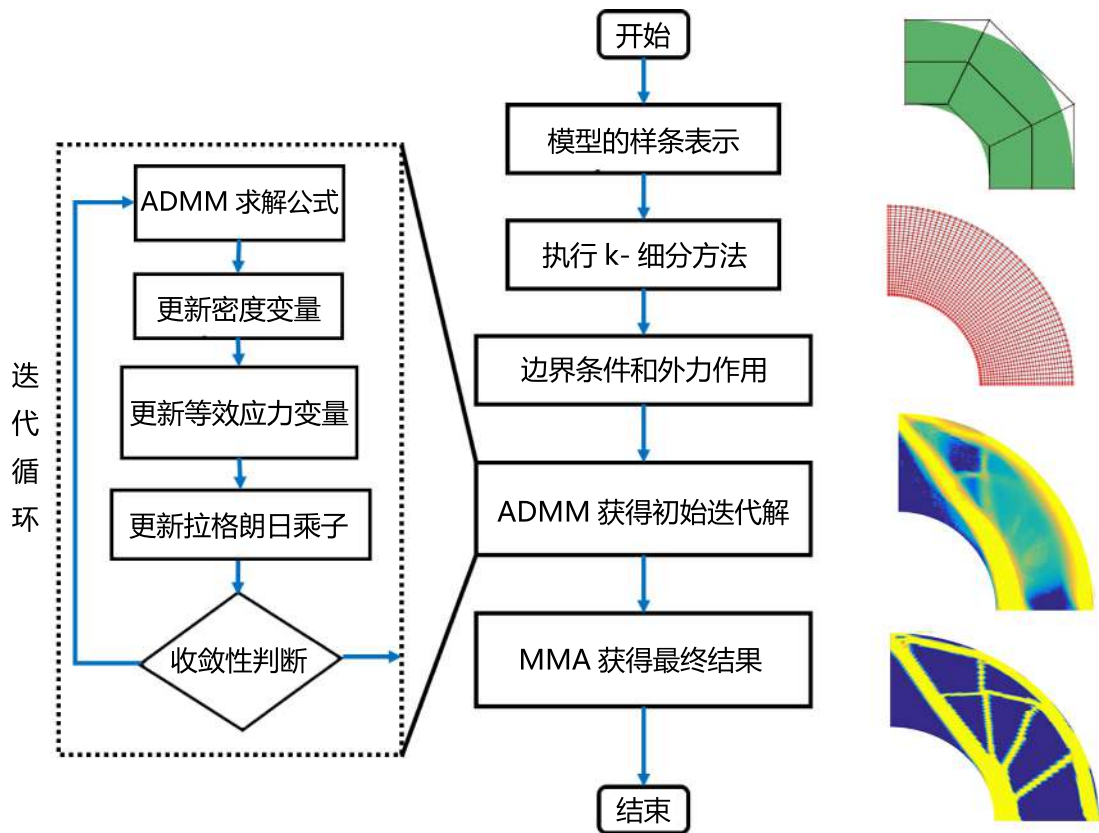


图 3.12 基于等几何分析带有应力约束的拓扑优化算法的流程图。

3.4.2 灵敏度分析

在本节，针对优化模型的灵敏度进行分析。优化过程中主要的灵敏度是 $\frac{\partial V}{\partial \rho_{ij}}$ 和 $\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho_{ij}}$ 。材料体积对密度 ρ_{ij} 的灵敏度计算公式如下：

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial \rho_{ij}} &= \frac{\partial \rho_e V_e}{\partial \rho_{ij}} = \sum_{e=1}^{N_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \rho_{ij}} \cdot v_e, \\ \frac{\partial \rho_e V_e}{\partial \rho_{ij}} &= R_{ij}^{pq}(\xi_e^c, \eta_e^c) = R_{ij}, \\ \frac{\partial V}{\partial \rho_{ij}} &= \sum_{e=1}^{N_e} R_{ij} \cdot v_e.\end{aligned}$$

为了计算 $g(\rho)$ 对密度 ρ_{ij} 的灵敏度，我们首先分析等效应力变量 $g(\rho)$ 。 $g(\rho)$ 和 ρ_{ij} ($i \in [0, N_x], j \in [0, N_y]$) 都是向量。 $g(\rho) = (g_1(\rho), g_2(\rho), \dots, g_{N_a}(\rho))$ 。所以， $\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho}$ 是 $N_a \times m$ 的矩阵，

$$\frac{g(\partial \rho)}{\partial \rho} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\rho)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial g_1(\rho)}{\partial \rho_2} & \dots & \frac{\partial g_1(\rho)}{\partial \rho_{N_x \times N_y}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_{N_a}(\rho)}{\partial \rho_1} & \frac{\partial g_{N_a}(\rho)}{\partial \rho_2} & \dots & \frac{\partial g_{N_a}(\rho)}{\partial \rho_{N_x \times N_y}} \end{bmatrix}.$$

在此，我们选取 $\frac{\partial g(\rho)}{\partial \rho}$ 中的一项 $\frac{\partial g_a}{\partial \rho_{ij}}$ 。针对函数 $g(\rho)$ 对变量 ρ_{ij} 的灵敏度利用链式法则计算如下：

$$\frac{\partial g_a}{\partial \rho_{ij}} = \frac{\partial g_a}{\partial \sigma_a} \cdot \frac{\partial \sigma_a}{\partial \rho_{ij}}.$$

在高斯点 a 处的放松等效应力是 σ_a 由 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ 计算而得。 $\sigma^{VM} = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y}{2} + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}$ 。 $g(\rho)$ 针对密度变量 ρ_{ij} 的灵敏度是 $\frac{\partial g(\rho)}{\partial \sigma_a} = \left(\frac{\partial g(\rho)}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial g(\rho)}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial g(\rho)}{\partial \sigma_{xy}}\right)$ 。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma^{VM}}{\partial \sigma_x} &= \frac{1}{2\sigma^{VM}}(2\sigma_x - \sigma_y), \\ \frac{\partial \sigma^{VM}}{\partial \sigma_y} &= \frac{1}{2\sigma^{VM}}(2\sigma_y - \sigma_x), \\ \frac{\partial \sigma^{VM}}{\partial \tau_{xy}} &= \frac{1}{3\tau_{xy}}(\sigma^{VM}).\end{aligned}$$

其次我们计算 σ_a 对于密度变量 ρ_{ij} 的灵敏度

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial \rho_{ij}} = \frac{\partial \rho_e^s}{\partial \rho_{ij}} D_0 B_a u_e + \rho_e^s D_0 B_a \frac{\partial u_e}{\partial \rho_{ij}} = s \rho_e^{s-1} D_0 B_a u_e + \rho_e^s D_0 B_a \frac{\partial u_e}{\partial \rho_{ij}}.$$

为了书写方便，我们将上述灵敏度公式作如下简化：

$$\frac{\partial \sigma_a}{\partial \rho_{ij}} = s \rho_e^{s-1} D_0 B_a u_e - \rho_e^s D_0 B_a (-K_e^{-1}) \frac{\partial K_e}{\partial \rho_{ij}} u_e,$$

式中,

$$K_e = \int_{\Omega_e} B^T D(\rho_e) B d\Omega_e = \int_{\Omega_e} B^T \rho_e^k D_0 B d\Omega_e$$

且

$$\frac{\partial K_e}{\partial \rho_{ij}} = \int_{\Omega_e} B^T \rho_e^{k-1} k D_0 B dR_{ij} \Omega_e.$$

在此灵敏度分析中, 我们采用伴随方法进行求解。

我们固定 $g(\rho^{k+1})$ 和 $\max(\sigma_a^{VM})$ 。与第一个子问题相比, 该部分的灵敏度分析较为简单。所以函数 $L(\sigma^{VM})$ 针对应力变量 σ 的计算公式为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\sigma^{VM})}{\partial \sigma^{VM}} &= \frac{\partial \mu(\sigma^{VM} - \max(\sigma_a^{VM}))}{\partial \sigma^{VM}} + \lambda^T + \eta(\sigma^{VM} - g(\rho^{k+1})), \\ &= c_1 \cdot c_2 \cdot (\sigma^{VM} - \max(\sigma_a^{VM}))^{c_2-1} + \lambda^T + \eta(\sigma^{VM} - g(\rho^{k+1})). \end{aligned}$$

3.4.3 结果分析与讨论

在本小节, 针对四分之一圆环面进行应力拓扑优化, 初步测试该方法的有效性。图 3.13(a) 中介绍了模型的设计域及初始边界条件。在模型的左上角施加垂直向下的外力 F , 并对模型的下方进行固定。值得注意的是, 不同的参数设置对 GCMMA 算法最终的拓扑结构有很大的影响。如果参数不合理, 会造成更很多的灰色区域即算法不收敛的情况。

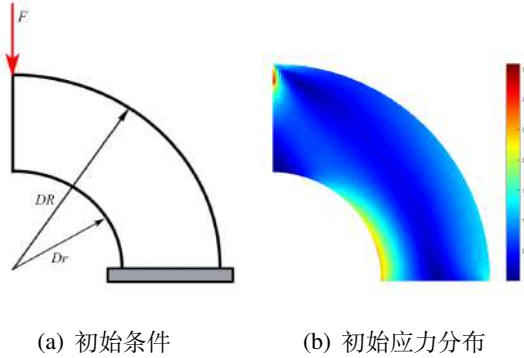


图 3.13 $\frac{1}{4}$ 环形结构的受力示意图与初始应力分布图。

我们在网格分辨率 100×60 的情况下测试了 MMA, GCMMA 和本文算法。表 3.4 总结了基于三种不同算法的单元数 (N_{num})、中间迭代拓扑结构和最终拓扑结构、最终应力分布图、迭代步数 (N_{iter})、体积比 (V/V_0) 和最优时间 (t)。从表 3.4 中我们总结出基于 ADMM-MMA 方法迭代次数相比于 MMA, GCMMA 有了大幅度的降低。相应的在优化时间中也占有优势。从最后的优化结构的应力分布图来看, 三种优化算法产生的结构类似。但是在目标函数方面, 我们的方法是相比于 MMA 降低 4.95%, 相比于 GCMMA 降低 0.97%。一般来说, 我们用迭代

步数和最优时间来衡量收敛速度。通过对三种方法迭代总步数和中间拓扑结构的比较，ADMM-MMA 的收敛速度比其他两种方法快。

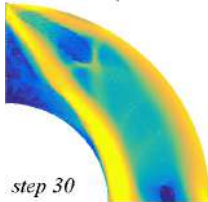
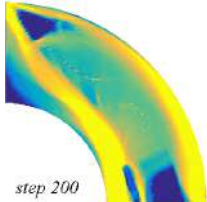
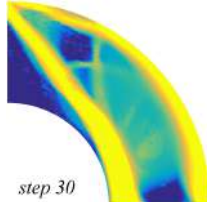
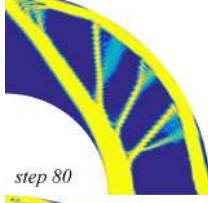
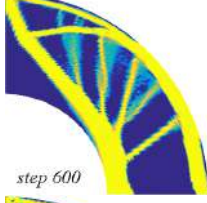

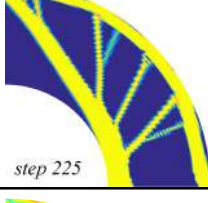

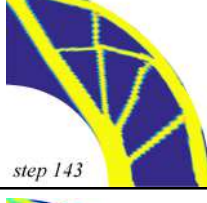
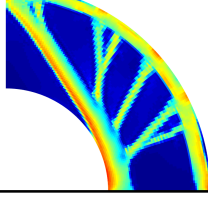
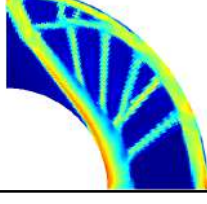
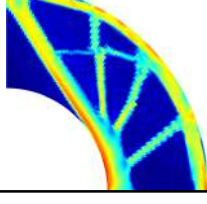
优化方法	MMA	GCMMA	ADMM-MMA
N_{ele}	100 × 60	100 × 60	100 × 60
中间结构			
			
			
应力分布			
N_{iter}	225	964	143
V/V_0	44.50%	38.58%	39.55%
$t(s)$	7136	32113	4856

表 3.4 在四分之一圆环面上不同优化算法 (MMA, GCMMA 和 ADMM-MMA) 的结果对比。

其次，我们分析了三种算法求解应力约束等几何拓扑优化问题的收敛性。图 3.14 表示三种算法在四分之一圆环面结构上的收敛图，其中左侧纵坐标表示体积比 (V/V_0)，右侧纵坐标表示最大 von Mises ($\max(\sigma)$)，横轴表示迭代次数。从图中可以看出，由于应力约束问题的高度非线性，在迭代的过程中三种算法都出现了不同程度的迭代震荡的问题。尽管 GCMMA 迭代过程相对平稳，但收敛速度较慢。本文算法在两种算法交接附近出现短暂的震荡现象，最后利用 MMA 算法收敛到最终解。

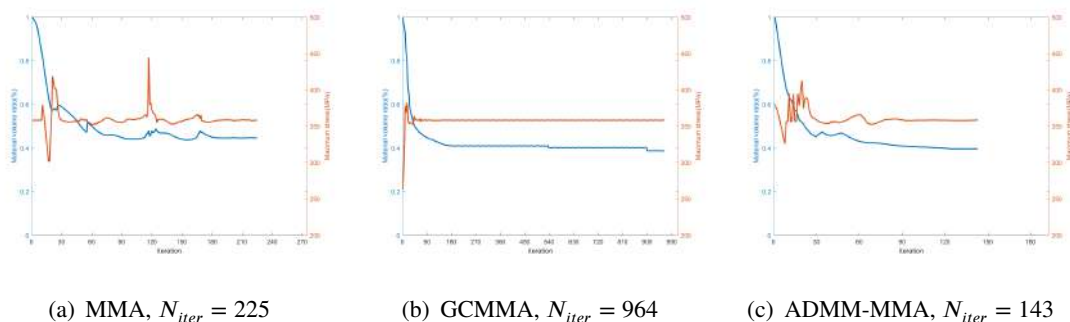


图 3.14 三种算法在四分之一圆环面上的收敛曲线。左侧纵轴表示体积比 (V/V_0)，右侧纵轴表示最大 von Mises ($\max(\sigma)$)，横轴表示迭代次数。

3.5 基于有限元与等几何分析的拓扑优化计算比较

我们利用四分之一圆环面 (图3.13所示) 针对 FEA 和 IGA 进行对比测试。圆环面内部半径为 100mm，外部半径为 200mm。底端固定，外力 ($F = 2000N$) 施加在左上角。下图显示了二次 NURBS 在不同细分级别的圆环面。这两种表示方法都可以精确的表示该圆环面。因此，利用 NURBS 表示的圆环面没有近似误差。有限元分析采用分段多项式逼近法，并采用高阶单元与精细网格相结合的方法来提高应力计算精度。

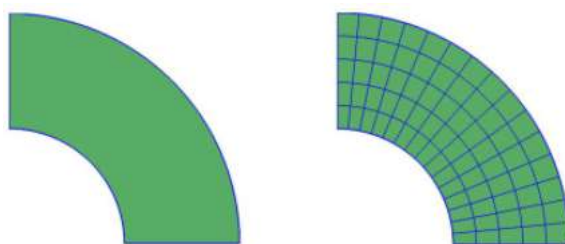


图 3.15 二次 NURBS 在不同细分级别的 $\frac{1}{4}$ 圆环面。(左) 初始物理域 (1×1)，(右) 细分物理域 (15×5)。

首先在此引入单元数 (N_e) 和自由度 (N_d)。在此说明一下 N_e 和 N_d 的关系：如果一个设计域细分的单元个数 $N_{e1} \times N_{e2}$ ，那么对于二次的 IGA 来说它的自由度：

$$N_d = 2(N_{e1} + 2)(N_{e2} + 2),$$

对于二次的有限元来说其自由度为：

$$N_d = 2(2N_{e1} + 2)(2N_{e2} + 2),$$

对于三次的 IGA 来说自由度为：

$$N_d = 2(N_{e1} + 3)(N_{e2} + 3),$$

对于三次的有限元来说其自由度为：

$$N_d = 2(3N_{e1} + 1)(3N_{e2} + 1)$$

在相同单元数的情况下，IGA 和 FEA 计算的 von Mises 应力对于二次单元和三次单元可以得到相近的结果。图3.16为自由度 (N_d , DOFs) 下，IGA 和 FEA 对 A 点 von Mises 应力的计算值的误差图。其中，取点 A 为右下单元的高斯点 (von Mises 应力最大值)。图3.16中给出了不同自由度下的 IGA 与 FEA 计算等效应力的比较。横轴为自由度的个数，纵轴为计算相对误差的 log 函数。然而，从图3.16(a) 和 (b) 的计算结果来看，要获得与有限元分析相同的精度，IGA 所需要的自由度要少得多。换句话说，与有限元分析相比，IGA 可以用更少的自由度提供更高的应力计算精度。当 IGA 的次数提升时，计算精度会有明显的提升。

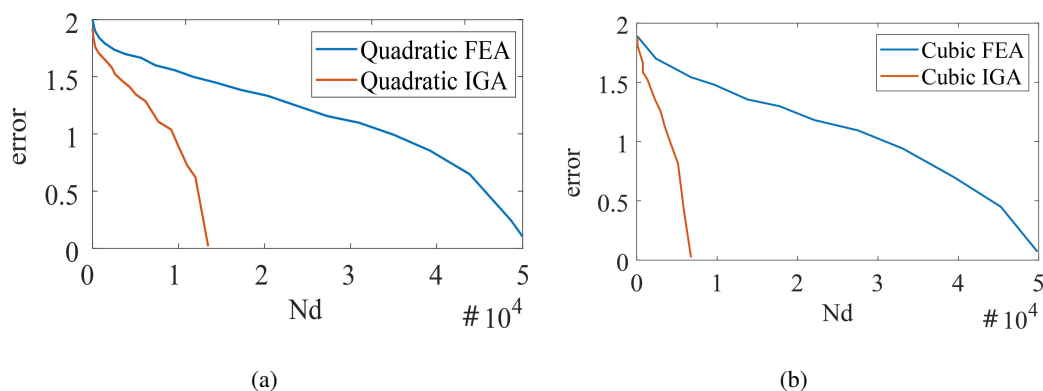


图 3.16 不同自由度 N_d 下 IGA 和 FEA 计算的 A 点等效应力计算误差。(a) 二次 IGA 与 FEA 计算误差比较。(b) 三次 IGA 与 FEA 计算误差比较。横轴为自由度的个数，纵轴为计算相对误差的 log 函数。

当单元数 (N_e) 相同时，我们测试 IGA 与 FEA 的对于 A 点的等效应力计算结果显示 IGA 相比有限元有应力计算优势。当自由度 (N_d) 相同时，我们测试 IGA 对于 FEA 对于 A 点的等效应力。值得注意的是，当考虑相同自由度 (N_d) 时，IGA 的单元数比 FEA 多。因此，与有限元分析相比，IGA 的矩阵计算涉及更多的元素，计算效率不如 FEA。

综上所述，在拓扑优化迭代问题中，等几何分析方法的优缺点：

- 等几何分析方法拥有表示精确，连续性好等特点；传统有限元方法针对复杂模型很难精确表示。
- 等几何分析以控制点的物理值（如：位移，密度，应力等）为变量不依赖于网格划分。相比于传统的有限元方法，它降低了优化变量的个数简化了优化迭代模型；
- 等几何分析方法在针对刚度矩阵的计算相比于传统有限元计算复杂度要高；传统有限元方法计算过程简单高效；

3.6 本章小结

本章首先针对带有应力约束条件的拓扑优化问题的难点进行分析。然后针对两种数值求解方法即基于有限元方法的求解与基于等几何方法的求解进行讨论。在基于有限元方法的求解过程中，我们首先给出了传统的带有应力约束的优化模型 (Q_0)，然后引入每个单元上的辅助应力优化变量，利用增广拉格朗日乘子方法将传统优化模型 (Q_0) 转化为新的优化模型 (Q_1)。该模型有两组优化变量即辅助应力优化变量和传统基于密度的方法中的密度变量。辅助应力通过一个等式约束与实际应力相关联。等式约束以增广拉格朗日方法作为线性项和二次项合并到目标函数中。与以密度为唯一设计变量的传统公式相比，所提出的双变量优化模型扩大了搜索空间。这个公式对于它的两组变量是可分离的。这就产生了一个有效的增广拉格朗日求解器，称为交替方向乘子法 (ADMM)。在每次迭代中，密度变量、辅助应力变量和拉格朗日乘子交替更新。通过与移动渐近法 (MMA) 及其全局收敛版本 (GCMMA) 的比较，证明了该方法的有效性。基于 ADMM 的连续体结构应力约束优化方法可使目标 (柔度) 比传统公式降低最多 9.1%。本章也对基于等几何分析方法的应力约束的拓扑优化问题进行了初步的讨论并在四分之一圆环面进行了测试，相比于 MMA 与 GCMMA 本文算法在时间与目标函数值上都有优势。结果同样证实了本文算法的有效性。为了使结果更有说服力，在未来的工作中需要测试更多的例子然后进行进一步的总结。

第4章 可微的微结构设计

4.1 引言

在第一章绪论中已经介绍了自然界中普遍存在的微结构。微结构的设计是拓扑优化的一个基本课题。目前微结构是在周期性的连续介质基础上进行讨论的。与微结构设计密切相关的是功能性梯度材料 (Functional Graded Materials, FGMs)。近年来, 功能性梯度材料以其高刚度、高吸声性、轻重量等优越的力学性能被广泛应用于各个领域。功能性梯度材料成为研究人员关注的热点。如何充分利用好功能性梯度材料, 设计出性能更高的微结构成为亟待解决的问题。

目前大多数构造功能性梯度材料的方法是通过简单几何变形来实现的。目前产生连续体积的功能梯度材料的方法有两类: 均匀形态学扩张算法和插值算法。在一章绪论中所罗列的基于逆均匀化方法的单一微结构优化和兼容性微结构优化都产生体积离散的微结构序列在此不作考虑。‘X’型结构可以看作是两根杆交叉形成的。将两根杆件的横截面积看作是变量, 不断增大杆件的横截面积可以得到一系列不同体积分数的‘X’型结构(图 4.1(a)), 类似的还有‘X’型结构的旋转结构如‘十’字型结构等。然而, 这些简单几何图形所能提供的物理特性是有限的。为了克服这些问题, 更多的微结构需要参与到优化过程当中。除此之外, 也有一些插值方法(如线性插值方法, 符号距离函数法等)来创建连续密度的微结构。直接对给定微结构进行线性插值而不考虑几何边界信息。线性插值算法的结果就会产生大量的灰色区域(见图 4.1(b))。针对符号距离场插值, 我们计算了微结构 A 和 B 的符号距离场 S_A 和 S_B 。然后通过对 S_A 和 S_B 进行加权, 得到 A 到 B 的中间微观结构。然而, 由于灰色区域和连通性问题(见图 4.1(c)), 利用该方法很难获得有意义的微结构。

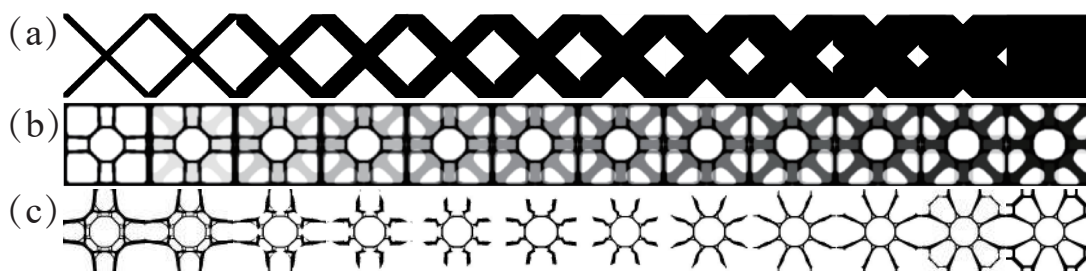


图 4.1 功能性梯度材料的简单例子。(a) ‘X’形结构产生的功能性梯度材料; (b) 线性插值方法产生的功能性梯度材料; (c) 基于符号距离场产生的功能性梯度材料;

如何保证在体积分数连续的同时提升微结构的物理特性是本章关注的重点。为了解决此问题, 本章首先提出了可微的微结构的概念。可微的微结构需要满足以下三个条件:

- 微结构序列由一个或几个参数通过参数化得到，例如微结构的体积分数。该参数是连续的，任意的参数能够对应唯一的微结构；
- 参数的微小变化会导致微结构物理性质的微小差异。
- 参数的微小变化导致微结构几何结构的微小变化。在此强调几何结构并非拓扑结构是因为几何结构产生一个无限小偏移，可能导致拓扑变化。这一条件对于避免不同微结构的几何不连续而导致应力集中具有重要意义。

为了设计具有最佳力学性能的可微的微结构，本文算法从连续参数化出发同时优化多个关键微结构的力学性质，因此条件 1 和 3 自然地得到满足。本文讨论以体积模量 (物体的体应变与平均应力之间的关系) 为代表的力学性质。体积模量是弹性模量的一种，它用来反映材料的宏观特性。此外，我们提出了一个正则化算法来保证第二个条件。该方法可用于设计具有最大体积模量的二维可微微结构。这一系列的微结构是由高度场控制的，每个高度的截面对应着一个独特的微结构。体积模量沿高度方向的不连续性可以用局部极大值点和马鞍点来表征，采用一种新的正则化方法有效地避免了物理性质间断性问题。利用本章算法，每个微结构对应于优化范围内任何体积分数的体积模量非常接近 Hashin-Shtrikman 上限。

4.2 算法描述

(1) 正向问题分析

本文考虑二维的可微的微结构的生成。首先，本文将设计域划分成 M 个单元 (M_x, M_y 表示在 x 和 y 方向的单元个数)，并在每一个单元内部指定一个值构造三维的物理场 \mathbf{T} (三维曲面，见图4.2)。此时，该物理场 \mathbf{T} 的每一个横截面都可以映射成一个微结构。本文采用 Heaviside 函数 \mathbf{P} 作为投影函数。该函数建立了微结构 $\rho = \{\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N\}$ (N 是微结构的个数) 和物理场 \mathbf{T} 的联系。第 n 个微结构的表达式为：

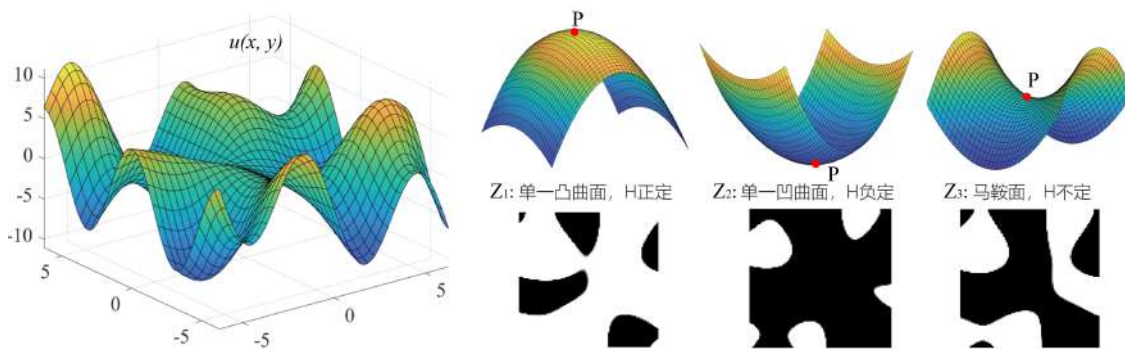


图 4.2 任意一个三维开曲面是由凸曲面，凹曲面，马鞍面组成。

$$\rho^n = \mathbf{P}(\beta, \eta_n, \mathbf{T}) = \frac{\tanh(\beta\eta_n) + \tanh(\beta(\mathbf{T} - \eta_n))}{\tanh(\beta\eta_n) + \tanh(\beta(1 - \eta_n))}. \quad (4.1)$$

通过观察投影函数 \mathbf{P} 的函数曲线, β 控制曲线的陡峭程度, 这也意味着当 β 足够大时, 投影后的值向 0 或者 1 逼近。物理场 \mathbf{T} 可以通过投影函数 \mathbf{P} 获得黑白分明的微结构。 η 决定投影阈值也就是指定横截面的高度的微结构投影。

物理场 \mathbf{T} 的曲面特性对产生的微结构序列的性质至关重要。物理场的连续变化会导致微结构的体积连续变化。其次, 物理场形状的变化将直接影响微结构的密度分布, 进而影响其物理性能。对于一般的三维开曲面 $u(x, y)$, 我们可以将其分为单一凸曲面 Z_1 、单一凹曲面 Z_2 和马鞍面 Z_3 。任何复杂的三维曲面都是这三种曲面的组合。当前点 P 的 Hessian 矩阵 H 与极值点定义的关系是如果 H 是正定矩阵, P 是最大值点。如果 H 是负定矩阵, P 是最小点。否则, p 就是鞍点。

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

局部极大值点是由单一凸曲面所产生, 它的存在促进了区域的形成, 从而破坏了结构的连通性, 使得部分材料对物理性能没有贡献。局部极小值点是由单一凹曲面所产生, 它的存在丰富了微结构的拓扑多样性。马鞍点是由马鞍面所产生, 结构由此点开始断开, 它的存在破坏了结构的力学性能。所以产生可微的微结构的物理场的限制是没有局部最大值点和马鞍点。

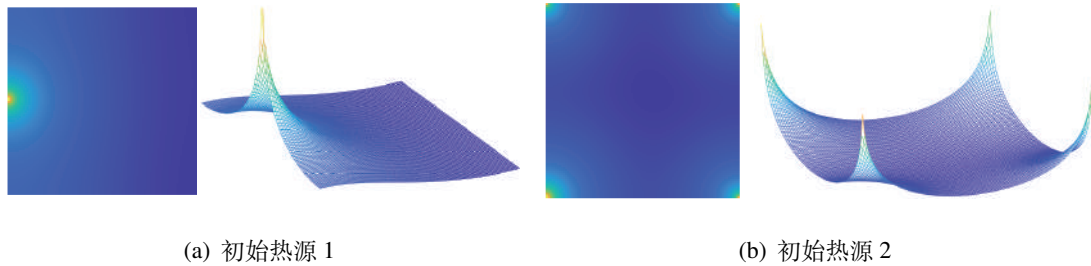


图 4.3 热传导过程仿真及其对应的三维物理场。

为了避免局部极大值点, 目前已经有一些约束条件比如 p -norm 约束 (类似于应力聚合公式, 利用 p 模对最大值近似) 和平均值约束。然而, 这些方法虽然存在一定的近似程度, 但是并不能严格避免局部最大值点的产生。在本文的工作中, 通过模拟热传导过程可以避免局部极值点, 即上面提到的物理场转换成温度场。根据温度传播的自然规律, 建立热传导方程。我们通过求解下列二维均匀热传导方程来确定热源的位置 ($u_{t=0} = u_0$) 并避免局部极大值点的产生

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right),$$

式中, \mathbf{T} 是物理场 (温度场), α 是传热系数, t 是传热时间, x 和 y 表示传热方向。本文所要求解的问题是二维热传导方程的柯西问题, 可以用傅里叶变换的方法得到如下解析解:

$$T(x, y, t) = \frac{1}{4a\pi t} \iint_{\mathbf{R}^2} T_0(\zeta, \xi) e^{-\frac{(x-\zeta)^2 + (y-\xi)^2}{4a^2 t}} d\zeta d\xi.$$

为了便于算法的实现, 我们采用有限元法来近似求解。

(2) 模型建立

本文希望通过构造一个物理场 \mathbf{T} (温度场), 然后利用投影函数 \mathbf{P} 得到一系列可微的微结构。在此, 本文选取 N 个微结构, 试图通过控制这 N 个微结构的性质提升整体可微的微结构序列的性质。优化过程应避免局部极大值点和马鞍点的产生。优化问题的数学表达式为:

$$\max_{\alpha} J = \sum_{n=1}^N f(E^H(\rho^n)) = \sum_{n=1}^N f(Q(\rho^n)), \quad (4.3)$$

$$\text{s.t. } A(\tilde{\alpha})T = B, \quad (4.4)$$

$$\sum_{e=1}^M v_e^n \cdot \rho_e^n / |Y^n| \leq V^n, \quad \forall n, \quad (4.5)$$

$$0 \leq \alpha_e \leq 1, \quad \forall e. \quad (4.6)$$

式中 $\tilde{\alpha} = c \cdot \alpha$, $c (= 1000)$ 是放缩因子将 α 放缩到区间 $[0, 1000]$ 。 $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M]$ 是设计变量。 M 是有限单元的总个数。 $\sum_{n=1}^N f(Q(\rho^n))$ 是目标函数。

$$f(Q(\rho^n)) = \sum_{i,j=1}^3 r_{ij} Q_{ij}^n,$$

$r_{ij} = 0$ 或 1 , $r_{11} = r_{22} = r_{12} = r_{21} = 1$ 。公式 (4.4) 是热传导方程。它避免了三维物理场中局部极大值点的产生。 A 是热传导矩阵且与 $\tilde{\alpha}$ 是线性关系。 T 是单元节点处的温度, 我们利用 \tilde{T} 表示单元的温度, 其表达式为:

$$\tilde{T} = G \cdot T.$$

式中, G 是节点物理量到单元物理量的变换矩阵。针对二维热传导方程 (4.4), 我们给出初始解 $\tilde{T}|_{t=0} = T_0$ 。微结构 $\rho = [\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_N]$ (N 是微结构的个数) 是通过不同的参数 η_n 控制的 Heaviside 函数投影得到的。公式 (4.5) 是体积约束。 v_e^n 表示单元 e 的体积。 $|Y^n|$ 是微结构 ρ^n 的全实体体积。 $V = \{V^0, V^1, \dots, V^N\}$ 单元 n 的体积比, $V^0 = 0$ 。

4.3 灵敏度分析

在本节针对上述优化模型进行灵敏度分析。目标函数 $J = \sum_{n=1}^N f(Q(\rho^n)) = \sum_{i,j=1}^3 r_{ij} Q_{ij}^n$ 关于优化变量 α 的灵敏度为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \left[\frac{\partial J}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial J}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial \alpha_M} \right], \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_e} &= \left(\sum_{n=1}^N \frac{\partial J}{\partial \rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial \tilde{T}} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tilde{\alpha}_e} \cdot \frac{\partial \tilde{\alpha}_e}{\partial \alpha_e}, \end{aligned}$$

式中，目标函数 J 关于 ρ^n 的灵敏度 $\frac{\partial J}{\partial \rho^n}$ 的表达式为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \rho^n} &= \sum_{n=1}^N \frac{\partial f(E^H(\rho^n))}{\partial \rho^n} = \sum_{n=1}^N \frac{\partial f(Q(\rho^n))}{\partial \rho^n} = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i,j=1}^3 r_{ij} \frac{\partial Q_{ij}^n}{\partial \rho^n} \right), \\ \frac{\partial Q_{ij}^n}{\partial \rho^n} &= \left[\frac{\partial Q_{ij}^n}{\partial \rho_1^n}, \frac{\partial Q_{ij}^n}{\partial \rho_2^n}, \dots, \frac{\partial Q_{ij}^n}{\partial \rho_M^n} \right], \\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \rho_e} &= \frac{1}{|Y|} p \cdot \rho_e^{p-1} (E_0 - E_{min}) [(u_e^{*(i)})^T k_0 u_e^{*(j)}]. \end{aligned}$$

式中， ρ^n 关于 \tilde{T} 的灵敏度 $\frac{\partial \rho^n}{\partial \tilde{T}}$ 的计算公式为：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^n}{\partial \tilde{T}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1^n}{\partial \tilde{T}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial \rho_2^n}{\partial \tilde{T}_2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\partial \rho_M^n}{\partial \tilde{T}_M} \end{bmatrix}_{M \times M}, \\ \frac{\partial \rho_e^n}{\partial \tilde{T}_e} &= \frac{\partial \mathbf{P}(\beta, \eta_n, \tilde{T}_e)}{\partial \tilde{T}_e} = \frac{\beta \cdot (1 - \tanh(\beta(\tilde{T}_e - \eta_n)) \cdot \tanh(\beta(\tilde{T}_e - \eta_n)))}{\tanh(\beta \eta_k) + \tanh(\beta(1 - \eta_n))}. \end{aligned}$$

令 $Z = \sum_{n=1}^N \frac{\partial J}{\partial \rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial \tilde{T}}$ 是 M 维的横向量。 \tilde{T} 关于 T 的灵敏度为： $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial T} = G$ 。

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha_e} &= \left(\sum_{n=1}^N \frac{\partial J}{\partial \rho^n} \frac{\partial \rho^n}{\partial \tilde{T}} \right) \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tilde{\alpha}_e} \cdot \frac{\partial \tilde{\alpha}_e}{\partial \alpha_e}, \\ &= Z \cdot G \cdot \frac{\partial T}{\partial \tilde{\alpha}_e} \cdot \frac{\partial \tilde{\alpha}_e}{\partial \alpha_e}, \\ &= Z \cdot G \cdot (-A^{-1} \frac{\partial A}{\partial \tilde{\alpha}_e} T) \cdot c, \\ &= -(R \cdot A^{-1}) \left(\frac{\partial A}{\partial \tilde{\alpha}_e} T \right) \cdot c. \end{aligned}$$

其中上述灵敏度可利用伴随方法进行求解。 $Z \cdot G = R$, $R \cdot A^{-1} = b^T \rightarrow A^{-1} R^T = b \rightarrow Ab = R^T$ 。

4.4 结果分析与讨论

4.4.1 评价方法

本文目标是产生一系列体积分数连续的高质量的微结构序列，高质量意味着物理性质尽可能接近 Hashin–Shtrikman 上限^[108]，即可微的微结构。Hashin–Shtrikman 曲线是多相材料的弹性模量和剪切模量的理论限制，它给出了两相材料力学性能的极限。它以体积分数为横坐标，体积模量、剪切模量为纵坐标。针对任意的体积分数，都存在一个体积模量与剪切模量的上限。我们通常用 Hashin–shtrikman 上界作为标准曲线来判断复合材料的力学性能。针对两相材料，通常由一个空材料和体积分数为 ρ 的实体材料组合而成，体积模量 K 和剪切模量 G 分别可以通过公式 (4.7) 和 (4.8) 计算而得：

$$K_{HS}^{up} = \frac{\rho KG}{(1-\rho)K + G}, \quad (4.7)$$

$$G_{HS}^{up} = \frac{\rho KG}{2(K+G) - \rho(K+2G)}. \quad (4.8)$$

通过本文算法利用均匀的参数 η 可以得到一系列体积连续的微结构序列，根据其结构分布可计算得到相应的物理特性（体积模量，剪切模量或泊松比）。本文采用 $\bar{v} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_m\}$ 表示微结构的体积分数， $\boldsymbol{\kappa} = \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\}$ ($\boldsymbol{\tau} = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}$) 表示微结构的体积模量（剪切模量，泊松比）。利用最小二乘法对离散点进行拟合，然后判断拟合后的曲线与理论曲线之间的偏差以判断产生的可微的微结构的物理性能。本文采用多项式函数 $g(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$ 作为拟合曲线，其中 k 为多项式阶，本文取 $k = 3$ 。对离散点进行拟合，我们采用如下无约束最小二乘优化问题：

$$\min \quad \mathbf{F} = \sum_{i=0}^m (\kappa_i - g(\bar{v}_i))^2. \quad (4.9)$$

本文引入两个指标来衡量所得到的结果，即 $\mathbf{F}(\bar{v})$ 和 K^{up} 的平方范数 \mathbf{E}_1^K 和无穷范数 \mathbf{E}_2^K 。

$$\mathbf{E}_1^K = \sum_{i=1}^m (\mathbf{F}(\bar{v}_i) - K_i^{up}), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{E}_2^K = \max_i |\mathbf{F}(\bar{v}_i) - K_i^{up}|. \quad (4.11)$$

4.4.2 算法比较

上文已经提及获取功能性梯度材料的算法有：①优化离散体积的单一微结构的逆均匀化方法（见图 1.13(a)）；②微结构的兼容性优化方法^[68]（见图 1.13(b)）；③针对给定微结构的均匀化形态学扩张算法（见图 1.13(c)）；④基于符号距离场

的结构插值算法(见图 1.13(d)-(f));相比于功能性梯度材料,可微的微结构对体积的连续性提出了更高的要求。算法①与②产生的微结构序列缺失体积的连续性特征在此不做讨论。

然而,基于符号距离场的几何结构插值在大多数情况下产生的微结构序列的连接性不能保证。其原因是初始和最终微结构的符号距离场在加权的过程中会产生无意义的结构。基于符号距离场的算法需要输入要插值的微结构,即图 1.13(d)-(f)的最左侧和最右侧微结构。该方法所产生的微结构序列与输入插值的微结构息息相关。图 1.13(f)展示了插值过程的存在连接性问题的微结构。此微结构的物理性质接近于 0。故在本节针对符号距离场插值算法不作讨论。

本文也提出了基于热传导方程的温度场投影算法。为了产生可微的微结构,可以采用均匀热传导系数的温度场投影。除此之外,本文算法优化了热传导系数再在此基础上进行温度场投影。本小节对比了三种算法产生的可微的微结构,并利用小节 4.4.1中介绍的评价指标进行算法评估。图 4.4展示了三种算法(均匀形态学扩张算法,基于均匀热传导系数的温度场投影算法,基于优化的热传导系数的温度场投影算法)的优化结果。最左侧为优化的初始微结构(温度场投影算法的初始热源)。

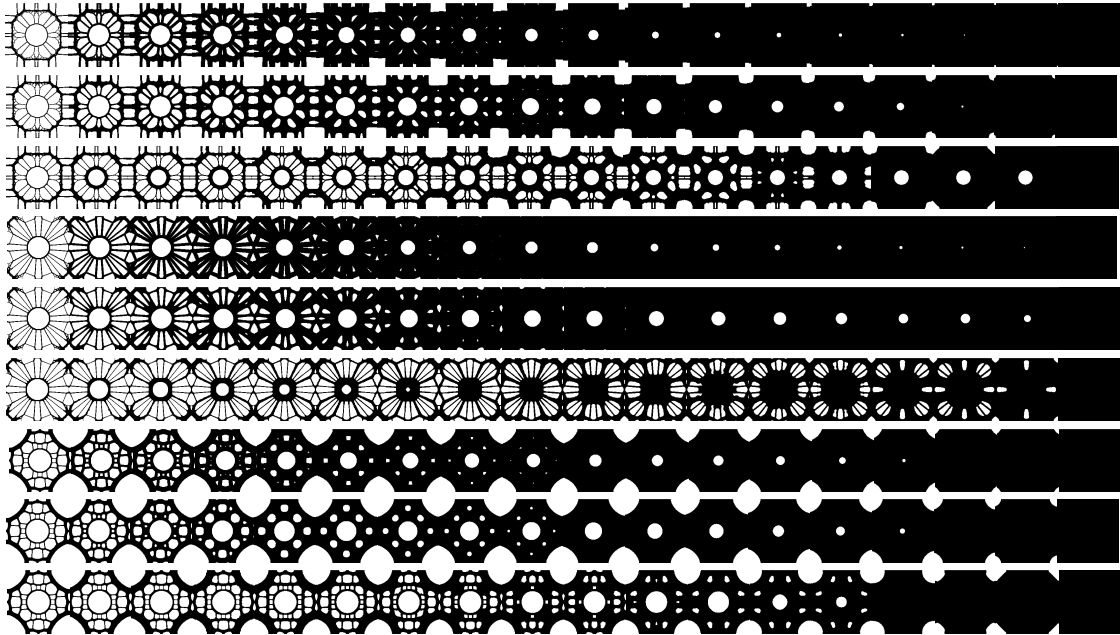


图 4.4 不同优化算法(从上到下依次为:均匀形态学扩张算法,基于均匀热传导系数的温度场投影算法,基于优化的热传导系数的温度场投影算法)的微结构序列结果对比。

通过对图 4.4的观察,利用均匀形态学扩张算法所产生的微结构序列会出现一些锋利的区域。这些锋利的微结构会产生应力聚集以致于其力学性能降低。均匀热传导系数的温度场投影算法则针对此问题进行了改善,将锋利区域进行

了平滑处理，对微结构的物理特性有进一步的提升。基于优化的热传导系数的温度场投影算法通过控制关键微结构的物理特性对整体微结构的序列进行改善。图 4.5提取了三个示例体积相近时的三种算法的材料分布结果。图 4.4对三种算法的结果进行了细节对比。通过比较发现基于本文算法的微结构优先针对微结构的骨架结构进行加粗并将微结构的体积分数与参数 η 进行了线性离散。

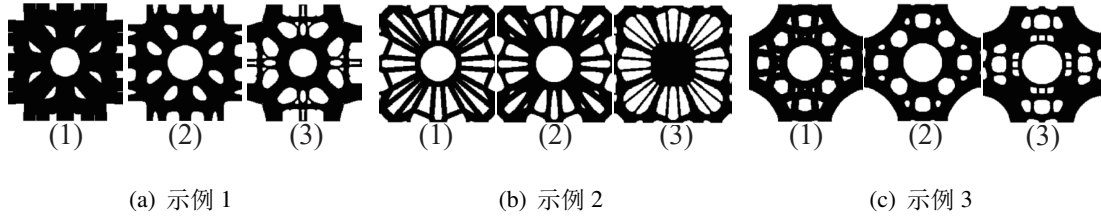


图 4.5 三种优化算法的细节对比。(1) 均匀形态学扩张算法；(2) 基于均匀热传导系数的温度场投影算法；(3) 基于优化的热传导系数的温度场投影算法；

本文首先对结构进行定性对比，绘制了微结构序列的体积分数-力学性质(体积模量)曲线(见图 4.6)。红色曲线表示 Hashin–Shtrikman(HS) 理论曲线中体积模量上限曲线。越接近 Hashin–Shtrikman 曲线表示微结构序列的物理特性越好。通过对比发现，基于优化的热传导系数的温度场投影算法表现最好，其次是均匀热传导系数的温度场投影算法，最后是均匀形态学扩张算法。

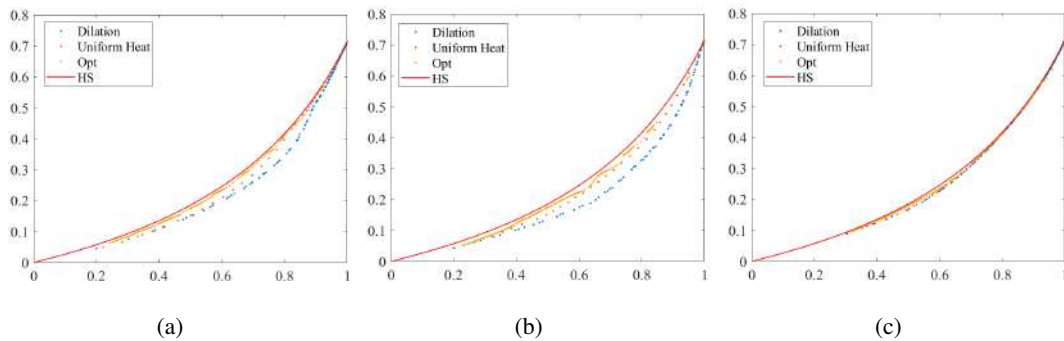


图 4.6 测试算例的体积分数-体积模量曲线图 vs. Hashin–Shtrikman 曲线。均匀形态学扩张算法 (Dilation) 用蓝色点表示，均匀热传导系数的温度场投影算法 (Uniform heat) 用橘红色点表示，本文算法 (Opt) 用黄色点表示。

其次，本文对优化结果进行定量对比。表 4.1中均匀形态学扩张算法，基于均匀热传导系数的温度场投影算法，基于优化的热传导系数的温度场投影算法分别用 ud , uh 和 oh 表示。表 4.1中表示根据 4.4.1中的两种衡量因子 \mathbf{E}_1^K (公式 (4.10)) 和 \mathbf{E}_2^K (公式 (4.11)) 对两个指标进行评估。其值越小，说明得到的微结构的力学性能越好(接近理论值的上限)。为了数据对比方便，本文给出了与表 4.1对应的图 4.7所示的柱状图。通过数据的分析与对比，可得最后的结果与图 4.6中的量化结果吻合。

评价指标	示例 1			示例 2			示例 3		
	<i>ud</i>	<i>uh</i>	<i>oh</i>	<i>ud</i>	<i>uh</i>	<i>oh</i>	<i>ud</i>	<i>uh</i>	<i>oh</i>
E_1^K	0.374	0.2289	0.0878	0.6513	0.3651	0.1516	0.0971	0.0878	0.0668
E_2^K	0.0644	0.0364	0.0191	0.11	0.058	0.0345	0.0161	0.0159	0.0192

表 4.1 可微的微结构生成算法的定量评估。

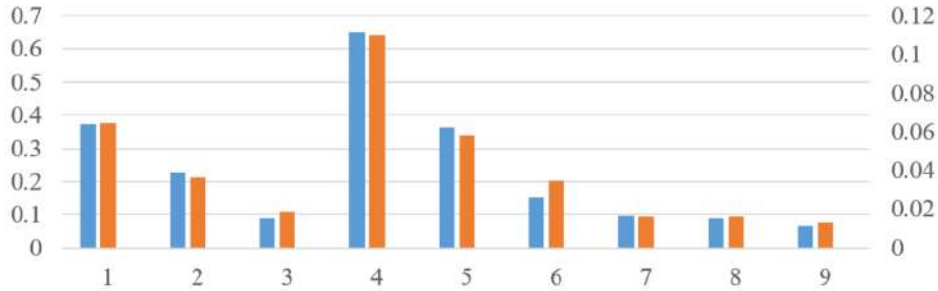


图 4.7 可微的微结构的产生算法的定量评估的柱状图。数字 1-3, 4-6, 7-9 分别表示示例 1, 2, 3 的基于三种优化算法的评估结果。

图 4.8展示了上述三种算法的三维物理场。该物理场的每一层的横截面对应唯一的微结构。从图4.8中可以发现温度场投影算法针对均匀形态扩张算法的锋利区域进行了平滑，提升了微结构序列的物理特性。本文算法针对微结构的骨架进行加粗并对微结构进行了 z 方向的拉伸及变形使其体积与参数 η 尽可能的满足线性关系 (优化过程中体积与参数 η 是线性约束关系)。

4.4.3 算法参数讨论

根据优化模型 (4.3)-(4.6)，优化过程中的参数主要有优化的关键的微结构的个数 N ，初始热源 \mathbf{T}_0 ，投影参数 η 与体积分数 V 的对应关系。在此，我们设置投影参数与体积分数是线性关系即 $\eta = 0.2$ 时， $V = 1 - \eta = 0.8$ 。在本小节，我们主要针对优化的关键的微结构的个数和初始热源的位置进行讨论。

(1) 优化微结构个数

本文基于逆均匀化的方法^[109]以体积模量为目标函数基于四种初始热源产生可微的微结构序列^①。四种初始热源的分布展示在图 4.10的最左侧。预先设置的微结构的体积分数为 20%。最终的微结构的体积分数为 1。为了对关键微结构的个数进行对比，在此，我们选取不同的微结构的数目即 3, 5, 7, 9。图 4.10展示了关键微结构个数为 3 和 9 的微结构序列。蓝色微结构表示优化的关键微结构 (在此省去了全实体微结构)。从图 4.10中可以看出当优化微结构的个数为 3 时，会产生一些对力学性质没有意义的结构分支，当优化的微结构的个数增大时，这些结构分支消失。

^①topX(100,100,0.2,,3,1.5); topX(100,100,0.2,,3,1.5); topX(100,100,0.2,,3,1.5);topX(100,100,0.2,,3,1.5)

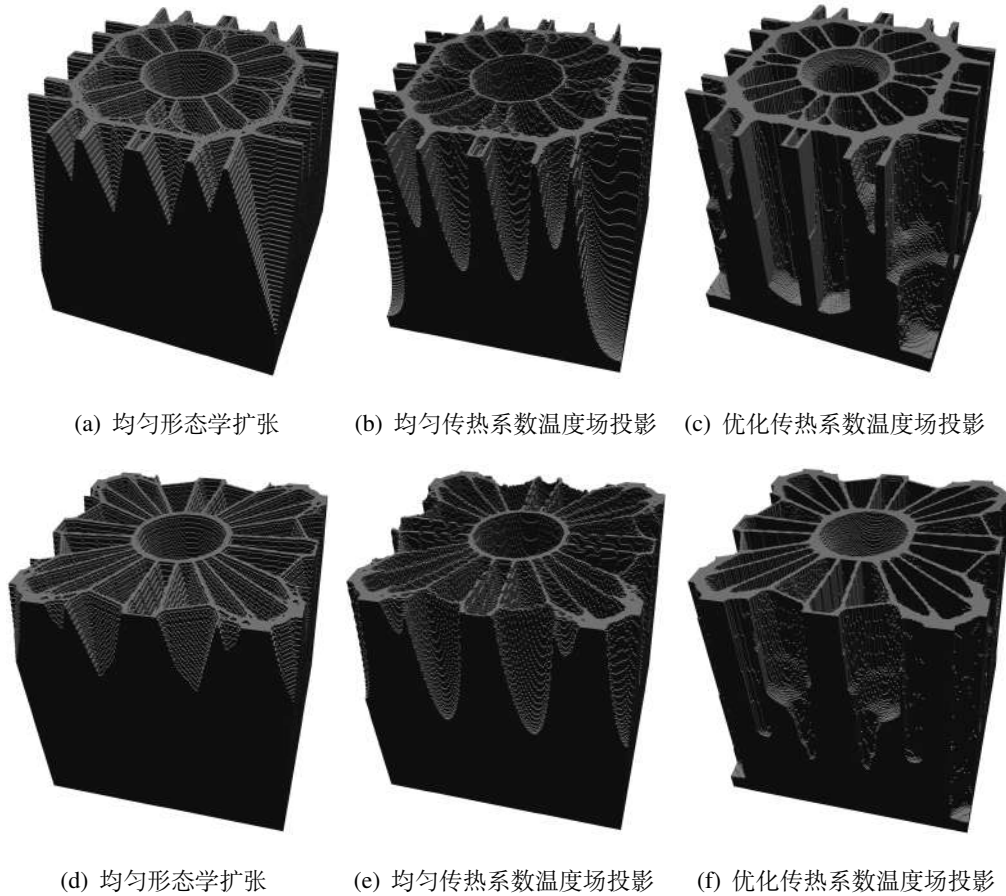


图 4.8 三维物理场(温度场)的可视化。(a)-(c) 示例一结果。(d)-(f) 示例二结果。

在图 4.9 中, 针对上述优化结果的温度场进行可视化。黄色区域表示初始热源即温度高的地方, 蓝色区域表示温度低的地方。当优化微结构的个数逐渐增大时, 从黄色区域向蓝色区域过渡就越缓慢和光滑。在图中的显示为黄色区域与蓝色区域界限模糊, 黄绿色区域增多。

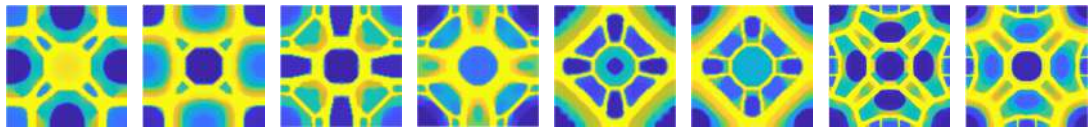


图 4.9 基于四种初始热源优化不同数目(3 和 9)的关键微结构产生可微的微结构序列对应的温度场。黄色区域是温度高的地方, 蓝色区域是温度低的地方。

本文也针对优化结构个数进行定量分析。首先, 我们分析了投影参数 η 与微结构体积的关系(见图 4.11)。当优化的微结构个数逐渐增大时, 投影参数 η 与体积分数越接近线性关系, 其生成的微结构序列的体积变得均匀。这说明了本文算法对体积约束的可控性。尤其在图 4.11(d) 的表现最明显。

对于图 4.11 的第二行, 我们选择均匀体积, 绘制相应的体积模量, 以便于观察和比较。结果表明, 当 $N = 9$ 时所产生的可微的微结构的力学性能逼近 Hashin-

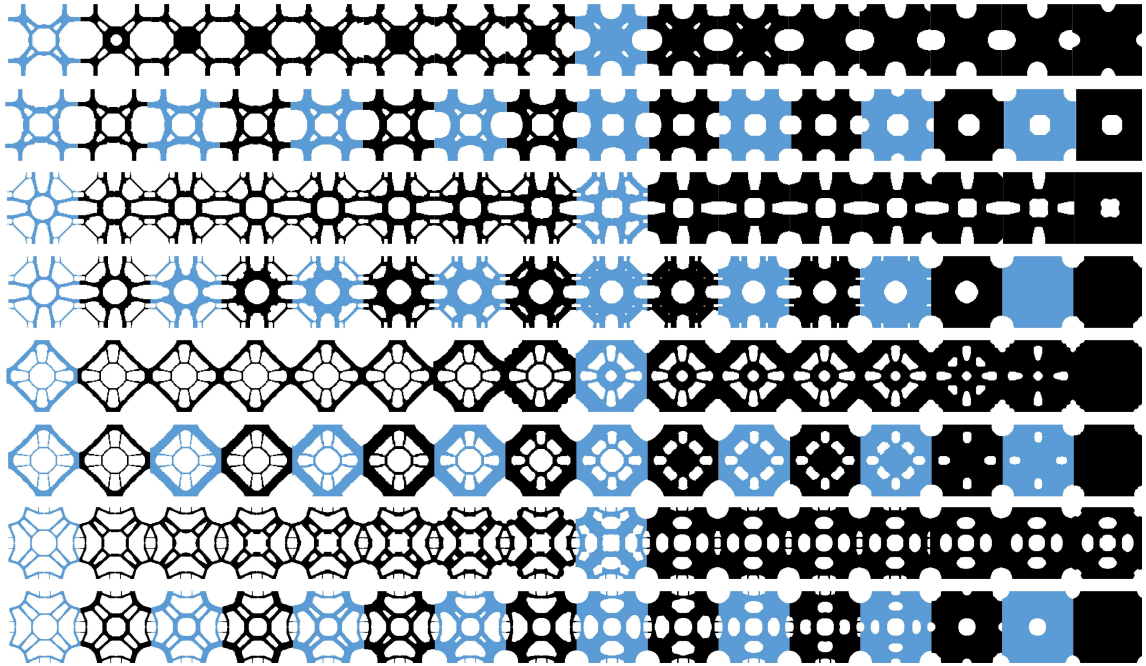


图 4.10 基于四种初始热源优化不同数目 (3 和 9) 的关键微结构产生可微的微结构序列。蓝色标记的微结构是优化过程中的关键微结构。

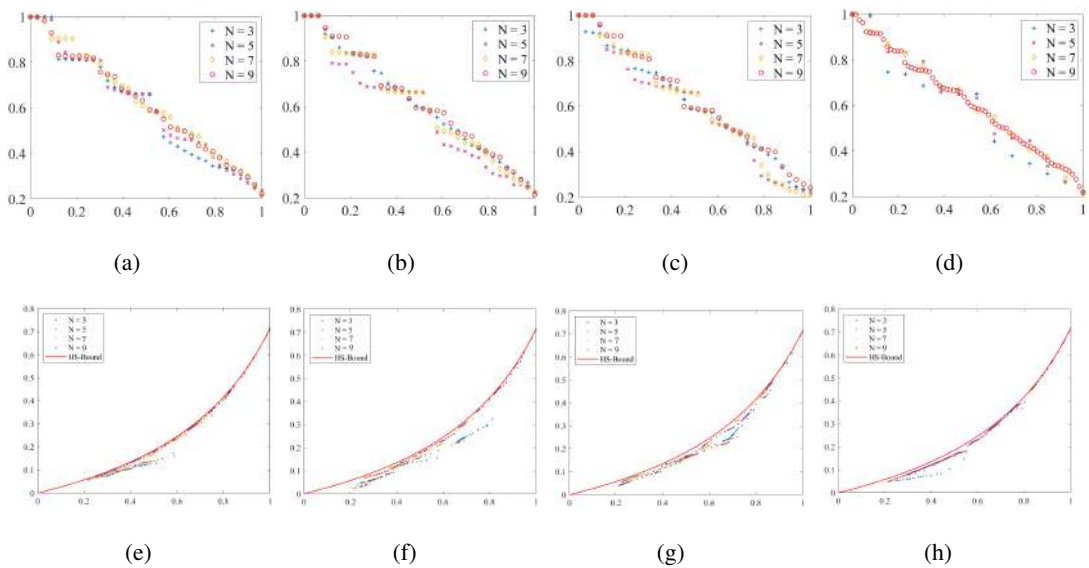


图 4.11 第一行 (a)-(d): 微结构的体积分数与投影参数 η 的关系。第二行 (e)-(h): 基于四种不同的热源体的体积模量与微结构的体积分数之间的关系。

Shtrikman 上限。通过观察发现，随着优化结构数量的增加，生成的微观结构序列的体积模量更接近 Hashin–Shtrikman 上限。值得注意的是，我们得出的这个结论只是一个一般的统计规律并没有理论保证。增加关键微结构的优化数量，等于优化这些微结构的力学性能，从而提高生成的微结构序列的力学性能。为了使结果更加具有说服力，我们计算了微结构的体积模量与体积分数的对应关系。对统计数据进行了最小二乘拟合。两种评价指标的具体值见表4.2，为了方便观

察我们也绘制了评价指标的柱状图 4.12。通过表 4.2 和 4.12 中可发现，虽然理论上不能通过增加优化组织数量来提高整个组织的力学性能，但统计结果表明，对于大多数例子优化结构数量的增加对生成可微的微结构序列的物理性能有积极的影响。

优化例子	示例 1				示例 2			
优化个数	3	5	7	9	3	5	7	9
E_1^K	0.167	0.165	0.096	0.059	0.478	0.282	0.177	0.190
E_2^K	0.029	0.031	0.017	0.018	0.084	0.047	0.049	0.0651

优化例子	示例 3				示例 4			
优化个数	3	5	7	9	3	5	7	9
E_1^K	0.315	0.295	0.163	0.167	0.304	0.136	0.121	0.107
E_2^K	0.055	0.05	0.028	0.031	0.056	0.021	0.019	0.016

表 4.2 可微的微结构的产生算法的定量评估。

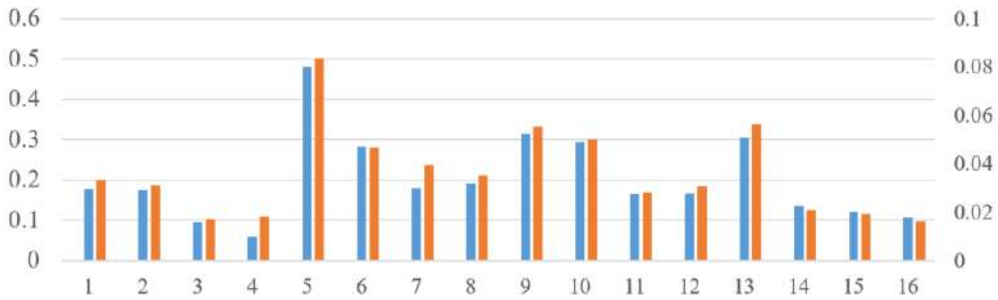


图 4.12 四种初始热源计算指标统计。蓝色柱状图表示 E_1^K ，橘红色柱状图表示 E_2^K 。

(2) 初始热源分析

在本节，我们针对初始热源进行分析总结出初始热源的分布对优化过程的影响，以便在初始优化阶段过滤掉物理性质不好的微结构序列。本文采用的初始热源都是基于逆均匀化方法以体积模量为目标函数产生的。在不同体积分数下，通过设置不同的过滤半径，过滤类型，惩罚参数来获取不同的微结构作为初始热源。图 4.13 展示了本文的初始热源结构图。

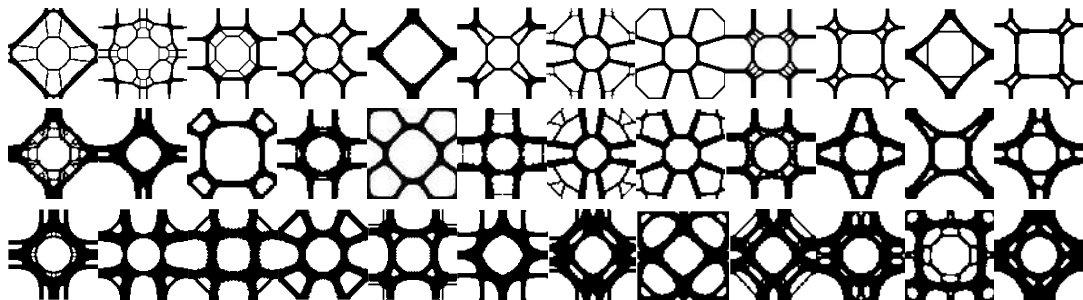


图 4.13 初始热源结构图。

通过对上述初始热源进行定量计算,发现基于部分初始热源进行优化的温度投影算法产生的可微的微结构经过本文优化算法之后仍然与 Hashin-Shtrikman 上限有较大的差距。除此之外,我们依旧将其与均匀形态学扩张算法和均匀热传导系数的温度场投影算法进行比较。其结果相比于这两种算法与 Hashin-Shtrikman 上限更加接近。图 4.14展示了五组初始热源产生的可微的微结构分布图。

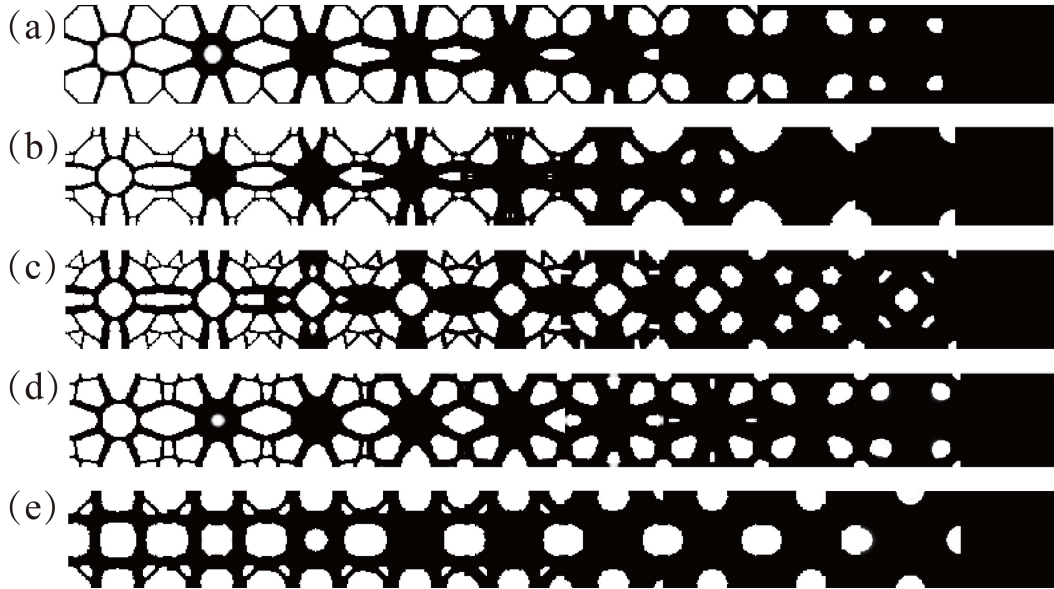


图 4.14 五组初始热源产生的可微的微结构分布图。

针对上述五组测试算例,在此我们绘制了微结构的二维颜色图及三维物理场图(温度场图),也绘制了体积分数与力学性能的关系曲线。从曲线系中,我们可以发现 case3 的体积模量距离 Hashin-Shtrikman 上限最远。距离 Hashin-Shtrikman 上限最近的是 case5。

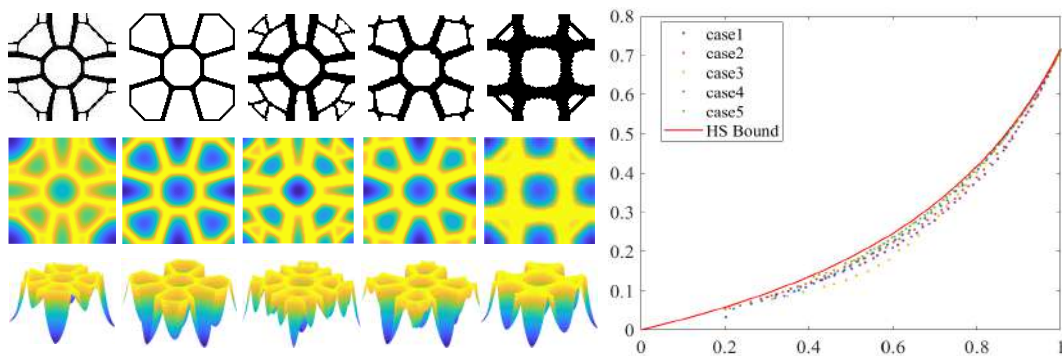


图 4.15 五组初始热源的温度场的二维颜色图及三维物理场图和其体积分数与体积模量的关系曲线。

为了进一步分析初始热源结构的几何特征,我们将上述五组初始热源进行周期性排列。然后用最大内切圆去逼近两微结构之间的相接区域。通过观察,当

最大内切圆的短半轴与长半轴之间比例越小(即短半轴与长半轴的相差越大,如图4.16(c)),用此初始热源进行优化的效果越不好。图4.16(e)的最大内切圆的短轴与长轴比例在五组初始热源中最大故其优化后的可微的微结构的力学性质越好。除此之外,优化结果的好坏还与最大内切圆的面积有关。面积越大,短半轴与长半轴的比越小的初始热源的优化效果就越不好。

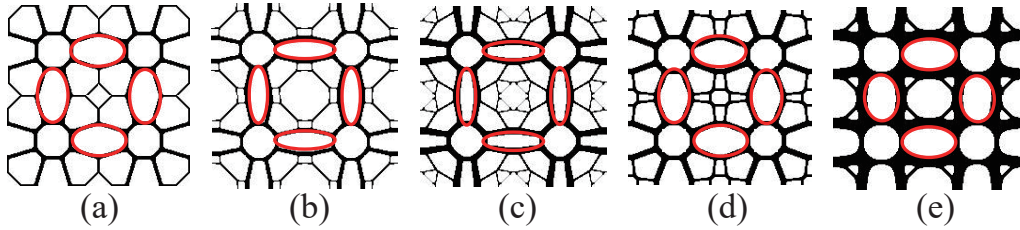


图 4.16 周期性排列的初始热源结构图。

4.5 本章小结

近年来增材制造技术的发展为制造复杂几何形状提供了一种有效手段,因此越来越多的科研工作者开始关注微结构的设计领域。与周期性微结构相关的是一系列空间体积与力学性质具有梯度变化的微结构的设计,称为功能性梯度材料。目前大多数的功能性梯度材料设计方法是通过简单的微结构的几何变形来构造的,更改不同的杆件的横截面积和对其进行几何插值。然而,这些简单的几何结构所能提供的物理特性是有限的。为了克服这些挑战,我们提出了可微微观结构的概念。在此,“可微”的概念是指参数通过微小的改变量,所得的微结构的力学性质和几何结构相应的进行微小的改变。在本文中,可微的微结构序列是由高度场控制的,每个高度场的截面对应唯一的微结构。体积模量沿高度方向的不连续性情况是由于高度场出现局部极大值和马鞍点。这两种情况破坏了微结构的力学性质。故如何避免高度场出现局部极大点和马鞍点是优化问题的约束条件。本文利用热传导方程模拟温度从高到低传递的过程从而避免局部极大值点的出现。对于马鞍点的约束目前没有很好的解决办法。本文通过增加微结构的个数来避免马鞍点的出现。通过与传统的均匀形态学扩张算法和均匀热传导系数的温度场投影算法做对比,实验结果印证了本文算法的优越性。对于相同的初始热源,通过本文算法产生的可微的微结构的体积模量更接近 Hashin-Shtrikman 上限。

第 5 章 增材制造领域中的路径规划问题

5.1 引言

增材制造技术从 20 世纪 90 年代中期出现以来迅速成为制造业领域的一项新兴技术,并且逐渐应用到了各行各业。它作为一种高效、分散式的生产工具带我们进入个性化与社会化创造的时代,并且将商品生产推向多元化与个性化的生产模式。在绪论中,本文已经归纳其基本流程为:模型输入,格式转换,切片计算,打印路径规划和实体打印五个步骤。路径规划是其中的一个重要环节,它是指 3D 打印模型在从 2D 到 3D 的逐层积累过程中,根据当前横截面所获得的不同的切片层规划出具体的打印路径并对其进行合理的优化,得到更快更好的 3D 打印效果^[110-111]。接下来,本文回顾了一些增材制造领域路径规划的相关工作。

Zigzag 形路径是最典型的路径规划方法。Zigzag 路径由平行于一个方向的一系列线段组成。它具有高效的计算效率因此商业软件中经常用 Zigzag 路径进行模型内部的填充。Zigzag 路径填充工作主要针对如何确定最佳倾斜度进行研究。Park 等人^[112]通过打印区域的形状和路径间隔确定最佳倾角。Rajan 等人^[113]提供了一种有效计算最佳倾角的方法。在区域以直线段或圆弧为边界的前提下,他们以尽量减少扫描线段的数量为目标确定 Zigzag 路径的倾斜角度。Kim 等人^[114]应用交点图生成一条路径,然后对其进行修改,使其保持恒定的材料去除率,以达到恒定的切削力,避免打印机喷头的颤动。Jin 等人^[115]充分考虑了熔融沉积建模 (FDM) 的技术特点,提出了一种方向平行的路径规划方法。Zigzag 路径虽然具有高效率的计算特点,但是会产生许多急转弯路径和在边缘处产生阶梯效应,影响打印质量。

轮廓平行填充路径是由一系列平行轮廓线(等高线)组成,这些填充曲线是通过切片边界的偏移产生的。这样的路径不仅保证了几何精度,而且避免了阶梯效应。Farouki 等人^[116]基于模型边界的有理表示来构造等距偏移曲线。它大大提高了偏置线计算的精度和速度。Yang 等人^[117]提出了一种有效的等距路径生成方法,该方法包括区域划分、偏置线生成和相交处理三个步骤。这种方法提高打印效率和质量。Abdullah 等人^[118]以降低加工时间提升加工效率为目标提出了一种基于蚁群优化算法的轮廓平行填充路径的生成方法。Tim 等人^[119]针对 FDM 技术提出了一种自适应宽度的轮廓平行路径填充算法,所提出的卷边格式 (beading scheme) 极大地改善了薄型零件的路径填充,这种结构经常出现在建筑模型、壳体原型或微结构中。轮廓平行算法的一个主要缺点是可能产生大量小的闭合路径曲线和拐点,从而产生填充不均匀的现象,增加了打印时间。

空间填充路径有很多种,如 Peano 曲线, Hilbert 曲线和螺旋曲线如费马螺

线等。S.H.Nair 等人^[120]提出了在有障碍物(或孔洞)的空间中产生均匀或非均匀 Hilbert 空间填充曲线。但是该方法产生的 Hilbert 曲线拐点过多,不适用于增材制造。C.Fleming 等人^[121]设计了一种后处理的贪婪算法来重新生成路径,该方法使得路径填充更加均匀。Held 等人^[122]首先计算出切片边界的中轴线,然后在该中轴线上放置可动态调整的圆盘,在每个圆盘内生成了一个没有孤立区域的螺旋曲线。他们进一步将该方法扩展到多重连通域^[123],将任意复杂的区域分解成更简单的部分,并用一条扭曲的螺旋曲线填充每个子区域。然而,该方法所生成的路径填充不均匀,不能直接用于增材制造。Chen 等人^[124]产生一系列的点然后按照一定的连接规则形成绘制线进而对 2D 图形进行逼近。该项研究是一种风格转换方法,产生的线条画可以直接用作 3D 打印。为了提升打印路径的均匀填充率,Zhao 等人^[33]在轮廓平行路径的基础上对上述算法进一步改进。他们根据偏移曲线的位置将一个区域分解成一组子区域并建立一套连接规则,将相邻的路径进行重新连接,用一条连续的费马螺旋曲线填充每个子区域,最终得到一条全局连续路径。综上所述,空间填充路径可以有效地避免自交并且达到全局连续。然而,该种算法的计算效率依赖于切片的复杂程度,切片越复杂,计算效率越低。

在某些情况下,单一的方法不能产生满意的填充路径,结合不同的算法得到的混合填充路径可以获得更好的填充效果。Jin 等人^[125]提出将轮廓平行路径和 Zigzag 填充路径结合的混合路径填充方法。在边界区域利用轮廓平行路径可以改善几何质量,在切片内部利用 Zigzag 路径填充以简化计算。Ding 等人^[126]将二维几何分解为一组凸多边形,对于每个凸多边形,通过 Zigzag 路径和轮廓平行路径的组合来确定一个最优倾斜角并生成一条连续路径。最后连接所有的子路径。Ibrahim 等人^[127]介绍了一种结合 Zigzag 曲线和螺旋曲线的路径填充算法,该算法可以生成具有内部特征的混合填充路径。图 5.1 展示了不同文章中,路径规划的填充结果图。

目前大多数的路径规划的研究对于切片的复杂度没有过多的讨论,所以生成的路径都是通用的。然而复杂结构在自然界中很常见,例如骨骼、软木、蜂巢、珊瑚等。对于切片复杂的模型,有些填充路径就会出现不连续,打印效率低下等问题,进而影响打印效果。如何在保证切片细节特征的前提下,最大限度地提升打印效率有着重要的研究意义。为了研究复杂模型的路径规划问题,本文将复杂模型划分为边界复杂和拓扑复杂的模型,并对其依次进行研究。将本文算法与传统的路径填充算法对比印证其鲁棒性和有效性。

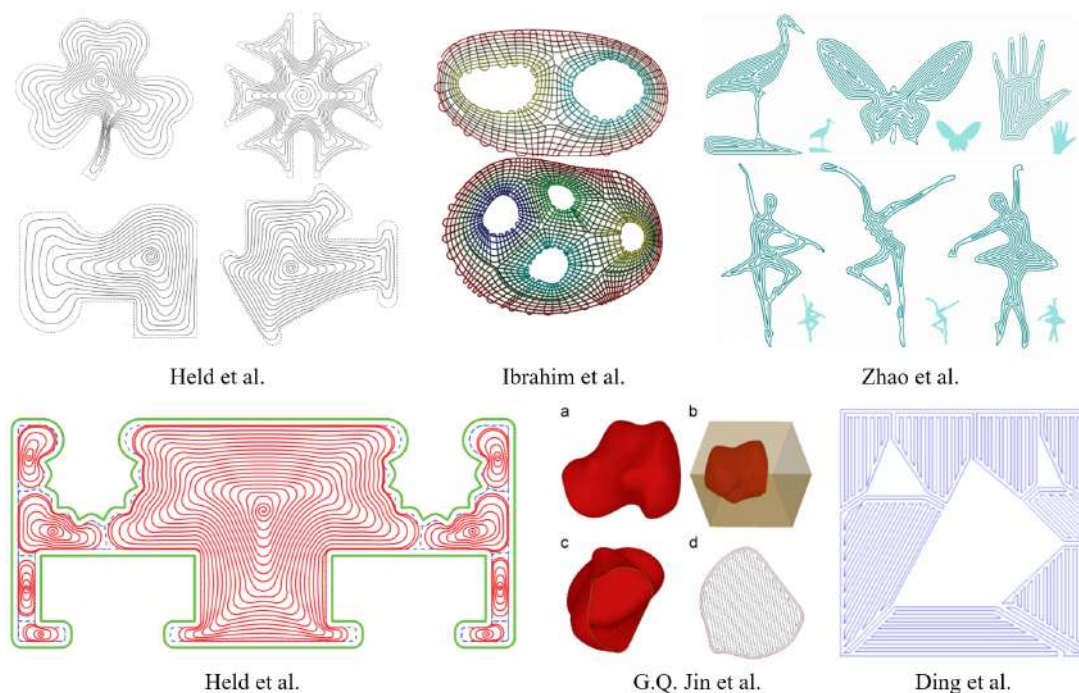


图 5.1 路径填充算法。

5.2 边界复杂模型的打印路径规划

本节研究边界细节特征复杂模型的增材制造的路径规划问题。这类路径规划问题的要求是既要保证打印的边界精度又要提升打印效率。近年来，边界复杂的结构在许多工程领域得到越来越多的应用。

5.2.1 算法描述

为了在保证边缘细节的精度条件下最大限度地提高打印效率，本文提出了边界复杂模型的 3D 打印路径规划算法。将该模型分为 3 个打印区域：轮廓层，过渡层及内层。针对 3 个不同的区域采取不同的填充措施。本文主要分为以下 4 个步骤：(1) 为了保证边缘细节的精度，将等距线进行特征点检测并设置相应的阈值来优化轮廓层层厚；(2) 建立优化问题确定过渡层的最优层厚，并确定一条光滑的三次 B 样条曲线作为过渡层内边界；(3) 针对过渡层和内层进行全局连续费马螺线填充，并提出费马螺线局部优化的算法；(4) 将 3 个区域内部的填充曲线连接并进行全局路径优化。算法的流程如下图所示：

(1) 轮廓层路径的填充

本文利用轮廓平行算法填充轮廓层，以达到保持边界特征的目的。为确定轮廓层的厚度，从模型的边界开始，通过偏置操作产生一系列等距线。对于等距线上的每一点检查其曲率信息，若曲率大于某一阈值则视其为特征点。特征点的分布能够体现整条等距线的主要特征和走向。当某条等距线上的特征点数量降低至原始特征点数量的某个比例 (本文设定为 50%) 时，停止等距线的生成，即确

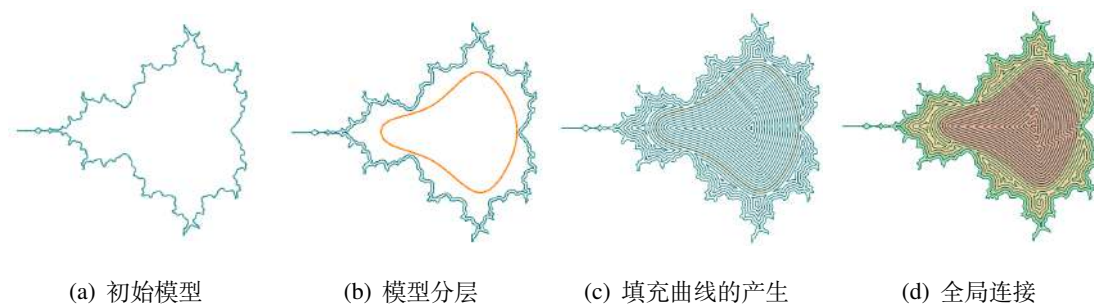


图 5.2 优化流程图。

定了轮廓层的厚度。

轮廓层内各条等距线是互相分离的，在实际打印过程中打印机的喷头存在上升与下降过程，会造成时间浪费。因此，构造连续的轮廓层打印路径是有必要的。本文采用最近邻扫描的算法，扫描完成每条等距线后，搜索其余未扫描等距线的最近点进行扫描，最终得到连续的轮廓层填充曲线。

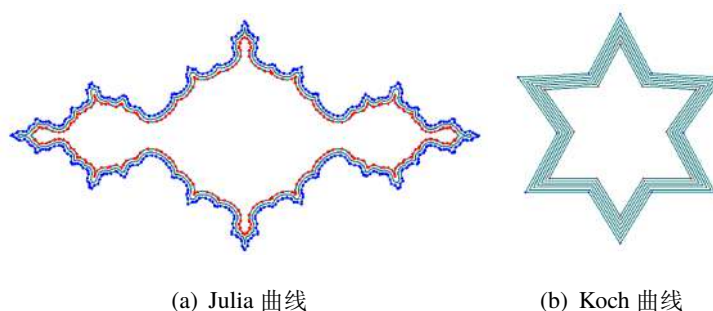


图 5.3 不同轮廓层生成。

(2) 过渡层优化问题

本文的目的是在保证一定精度的前提下最大限度地提升打印效率和打印结果的填充均匀性，这就要求过渡层的厚度要合理并且过渡层的内外边界不能相交。因此过渡层的确定在整个路径规划的算法中起着至关重要的作用。过渡层的优化有三个主要步骤：优化过渡层层厚、初始边界线预处理和三次 B 样条拟合过渡层边界。本文利用过渡层的面积为初步目标，设置过渡层的面积的下限 S_{min} (本文设为原模型总面积的 30%)，从轮廓层内边界开始，不断进行等距偏置操作；当过渡层的面积大于 S_{min} 时，则停止偏置操作，取最后一条等距线为过渡层内边界的初始边界线。该曲线也是内层的初始外边界曲线。

由于等距线在偏置的过程中依然保留了较多细节但此时的细节打印会影响整体的打印效率，因此需要将偏置后得到的过渡层内边界的初始边界曲线的细节进行简化。第一步先将过渡层内边界像素化，获取每个像素多边形的中心点进而剔除非特征点使得所有的像素中心点连接成一条能够遍历所有像素的最大图 $G = (V, E)$ ；其中 V 表示像素中心点， E 表示边，用 $deg(V)$ 表示像素中心点 V

的度，剔除的策略如下：

- 删除 $deg(V) = 1$ 的像素块 (见图5.4(b));
- 判断相交区域, 删除 ‘H’ 或 ‘工’ 字的中间相交部分 (见图5.4(c)), 优化后的过渡层内边界的像素点 (见图5.4(d));
- 为了减少存储量, 本文将像素中心点按照深度优先遍历原则进行连接 (见图5.4(e));

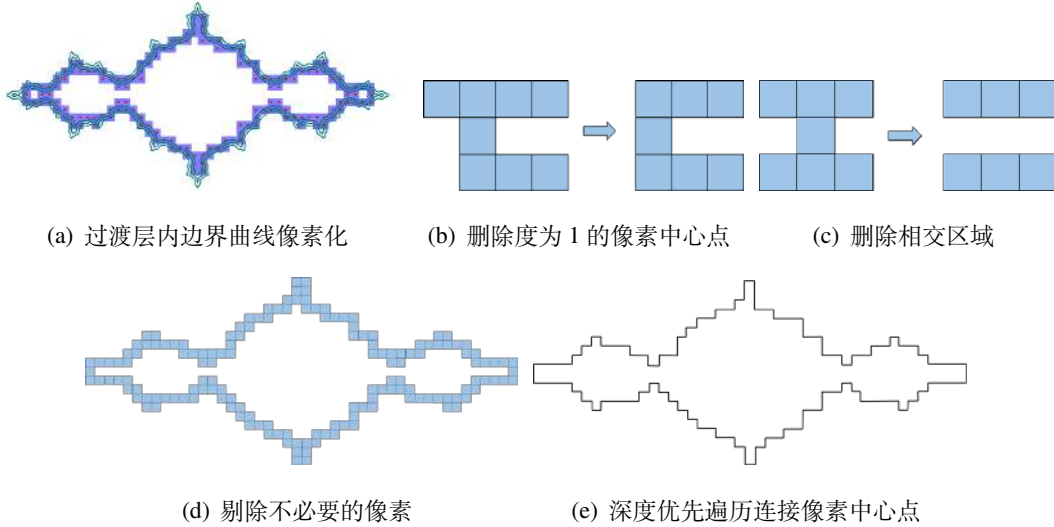


图 5.4 过渡层内边界初始曲线的预处理过程。

本文利用三次 B 样条对过渡层初始内边界进行拟合优化, 设最终拟合曲线的表示为: $p(t) = \sum_i^n P_i \cdot B_i^3(t)$, 其中, $p(t)$ 为三次 B 样条, $P_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是控制多边形的点; $B_i^k(t)$ 是 k 次 B 样条基函数, 且以 $U = \{u_1 \leq \dots \leq u_{k+1} \leq \dots \leq u_{n-k} \leq \dots \leq u_{n+k+1}\}$ 为节点向量, $n \geq 2k + 1$ 。 $B_i^k(t)$ 递归定义为 (k 为 B 样条的次数):

$$B_i^0(t) = \begin{cases} 0, & u_i \leq t \leq u_{i+1}, \\ 1, & \text{其他.} \end{cases} \quad (5.1)$$

$$B_i^{k+1}(t) = \frac{t - u_i}{u_{i+k} - u_i} B_i^k(t) + \frac{u_{i+k+1} - t}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} B_{i+1}^k(t). \quad (5.2)$$

为了得到光顺的过渡层内边界曲线, 本文建立如下优化问题:

$$\min \sum_{i=0}^m (p(t_i) - q_i)^2 + \lambda \int_0^1 |p''|^2 dt. \quad (5.3)$$

其中, $\{q_i\} (i = 0, 1, \dots, m)$ 为过渡层初始内边界上的采样点; $\{t_i\} (i = 0, 1, \dots, m)$ 为对应的参数, 可利用累积弦长参数化算法计算获得。拟合曲线为三次 B 样条的闭曲线。目标函数的第一项为拟合项, 第二项为光顺项。拟合项表示曲线上点与初始边界上的点的最小二乘距离; 光顺项取为曲线的曲率的平方积分, 在计算

中用 Gauss 积分; λ 为平衡参数, 本文取 $\lambda = 0.03$ 。通过上述方法取得的三次 B 样条曲线如下:

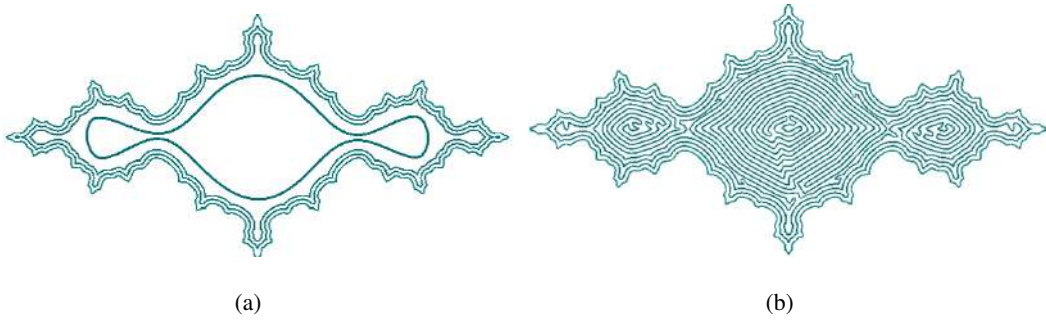


图 5.5 过渡层内边界拟合曲线和初步全局 CFS 曲线填充。

(3) CFS 填充

CFS 填充曲线的生成分为两个步骤: 第一步生成初步的全局连接曲线。第二步针对局部曲线进行优化。首先对过渡层与内层进行一系列的等距线偏置操作, 初步得到过渡层与内层的填充路径。以过渡层与内层等距线为节点, 建立初始图 $G_{initial}$ 。针对等距线进行编号 $l_{i,j}$, 其中, i 表示当前等距线到边界 ∂R 的距离 $d(\partial R, l_{i,j}) = i \cdot d$, 且 d 为偏置距离, j 表示到边界相同距离的等距线的序号, $l_{0,1}$ 为最外层边界。连接相邻等距线 $l_{i,j}$ 和 $l_{i+1,j}$ 。将初始图 $G_{initial}$ 转化为最小生成树, 以 $l_{0,1}$ 为根, 树的节点分为 2 种类型, 即节点的度小于等于 2 与节点的度大于 2。从叶子节点遍历至根节点, 重新进行路径规划, 得到图 5.5(b) 所示全局连接曲线。

目前利用费马螺线已经将过渡层和内层连成一条线, 但是仍存在大量拐点和相邻等距线过近的情况。本文提出一种局部曲线优化的算法, 针对曲率较大的拐点和等距线距离过近(远)的情况进行局部优化。首先进行二次样条曲线进行局部曲率优化, 尽可能地使整体曲率降低。由于内层边界利用光滑三次 B 样条逼近, 内层产生的等距线较光滑, 但是在部分区域仍然存在急转弯点。利用本文算法可以大大降低急转弯比例。图 5.6 所示为局部曲率优化效果对比图。其次确定不均匀填充的曲线段, 然后按照外法线地方向向外偏置合理地距离以提升填充均匀性。

(4) 多连通区域测试

在工程应用中, 3D 打印切片多为多连通区域。本文方法经过适当修改也可以打印多连通区域。采取在边界复杂的模型内部嵌套孔洞的形式构造多连通区域, 按照所提算法, 依然将打印区域分为轮廓层、过渡层和内层。在建立过渡层时需要产生 2 条或多条(根据模型的亏格数而定)光滑三次 B 样条曲线。然后利用费马螺线填充算法进行连接, 并进行局部曲线的位置和曲率优化。图 5.7 所示为边界复杂模型内部挖去若干边界复杂的空洞所构成区域的 3D 打印路径。

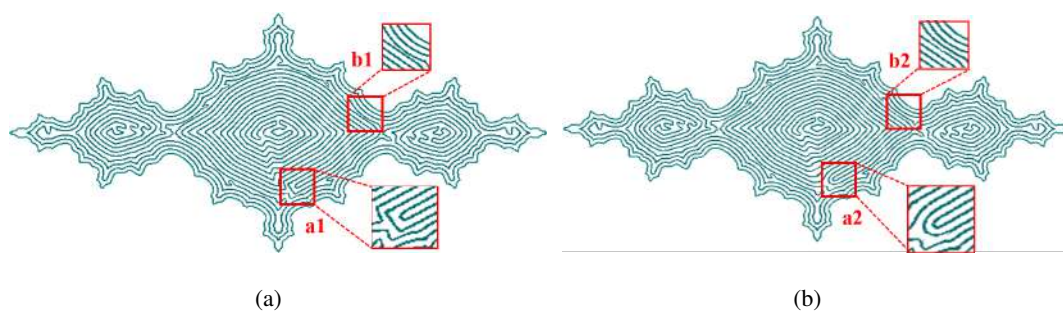


图 5.6 过渡层内边界拟合曲线和初步全局 CFS 曲线填充。

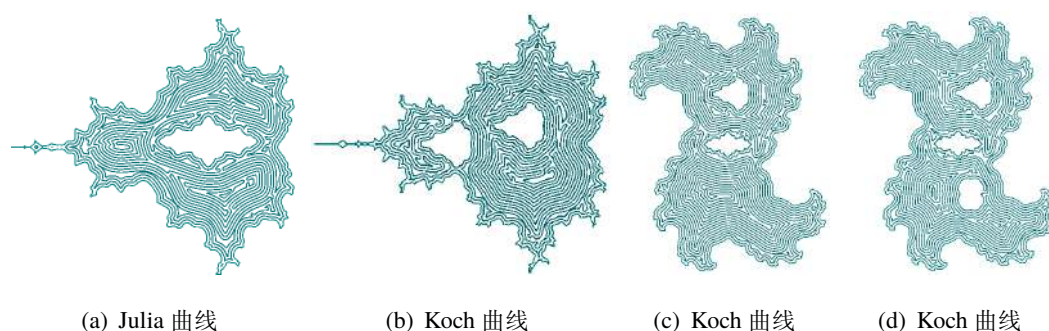


图 5.7 多连通区域的填充曲线。

5.2.2 结果分析与讨论

填充曲线的评估目前没有统一标准。本文综合从 5 个影响因素分析算法的优劣，即填充分割段数 (number of segments, SEG)，路径角度 (急转弯的数量 (sharp turn points, ST) 和最小角度 (minimum angle, MA)，欠填充 (under-fill, UF) 与过填充 (over-fill, OF) 比例，打印成本 (时间成本 (printing time, T) 和材料成本 (printing material, M) 和视觉效果。利用传统的 Zigzag 算法 (Zigzag, Z)，轮廓平行算法 (contour parallel, C)，费马螺线填充算法 (connected Fermat spirals, CFS)[5] 与本文边界复杂模型的路径规划算法 (our path, O) 进行对比，并利用 8 组模型进行测试。

本实验的打印机型号是 Ultimate 2+。本文的自适应边界算法利用 C++ 进行实现并且运行环境为 64 位操作系统，Inter(R) Core(TM) i7-4790 CPU 3.60GHz 处理器，8GB 内存。基本设置为：喷嘴直径为 0.4mm，每层高度 0.2mm，最大的扫描速度是 70mm。

(1) 边界复杂的模型

为了研究边界复杂模型的路径规划，我们首先需要产生边界复杂的切片。本文产生边界复杂的截面有两种方法：一种是选取边界复杂的三维模型通过均匀切片得到截面轮廓，一种是通过分形直接产生二维切片。分形是指具有自相似性的几何图形，它们是通常被定义为每一部分都是整体缩小后的形状，即具有自相似性。分形模型的产生思想是递归。递归的概念从 17 世纪被提出，而分形的概

念到 20 世纪分形才被提出。1975 年, Mandelbort 等人^[128-129]提出“分形”的术语。1982 年, Mandelbort^[130]提出了更正式的定义:“分形是一种其豪斯多夫维数严格大于拓扑维数的集合”。分形在数学意义上是由方程不断迭代产生的。

分形的经典方法包括 L 系统, 迭代函数系统 (IFS), 复变函数迭代系统等^[131]。L 系统是一个有一系列文法的并行重写系统。首先进行符号约定: 'F' 表示向前走一个单位长度, '+' 表示向右转 α , '-' 表示向左转 α 。正整数 n 代表科赫曲线的阶数, 表示生成科赫曲线过程的操作次数。科赫曲线初始化阶数为 0, 表示一个长度为 L 的直线。对于直线 L, 将其等分为三段, 中间一段用边长为 L/3 的等边三角形的两个边替代, 得到 1 阶科赫曲线, 它包含四条线段。进一步对每条线段重复同样的操作后得到 2 阶科赫曲线。继续重复同样的操作 n 次可以得到 n 阶科赫曲线。

普通 L 系统生成的图形都非常规则。随机 L 系统打破了固有的规则实现了分形结构的随机性。Mandelbrot 集是由迭代函数系统产生。它是由复平面上二次多项式函数

$$f(z) = z^2 + c,$$

迭代而得, 其中 $c = a + bi$ 为复参数, a 和 b 分别为 c 的实部和虚部。对于每一个参数 c, 从 $z_0 = 0$ 开始, 利用 $f(z)$ 进行迭代产生 $z_{n+1} = f(z_n), n = 0, 1, \dots$; 复数列 $\{z_n\}$ 不发散至无穷的所有复数 c 所对应的复平面上的点组成了 Mandelbrot 集。对于固定的参数 c, 以复数 $z = z_0$ 为初值, 此时迭代产生的复数列 $\{z_n\}$ 不发散至无穷的复数 z_0 所构成的集合为 Julia 集。Julia 集随 c 的变化而变化。

本文选取 8 组数据, 用序号 1-8 表示测试图形。1-5 分别表示 Julia 集分别取不同参数时的图形。(1. a = 0.2, b = 0.5; 2. a = 0.3, b = 0; 3. a = 0.68, b = 0.305; 4. a = 0.375, b = 0.2; 5. a = -1, b = 0; 6 表示 L 系统分形; 7 表示 Koch 曲线; 8 表示 Mandelbrot 集迭代 10 次所产生的曲线。)符号说明: # 表示数目, % 表示比例, & 表示度。

(2) 填充分割数

经过测试, 统计 4 种算法所产生填充曲线的分割数如表 1 所示。可以看出 Zigzag 路径的分割数最多, 其次是轮廓平行算法。CFS 算法和本文算法达到全局连续, 故分割数为 1。

分形	1	2	3	4	5	6	7	8	分形	1	2	3	4	5	6	7	8
#Z _{seg}	71	70	85	87	80	92	97	76	#C _{seg}	12	15	13	14	20	15	17	15

表 5.1 填充分割数比较。

(3) 急转弯比例

急转弯的比例直接影响打印效率，为计算急转弯比例，本文针对填充曲线均匀选取样本点，分别计算样本点处的角度。本文选取 50000 个样本点，当样本点处的角度小于 100 时判定为急转弯，统计样本点的角度并计算急转弯的比例。针对 8 组不同的分形图案测试四种算法的急转弯比例和最小角度，结果如表5.2所示。费马螺线填充是在轮廓平行的基础上进一步优化，急转弯比例相对减小，本文利用三次 B 样条光滑产生螺线可以有效减少急转弯比例，且在四种算法中急转弯比例最低。表5.2中最小角度的比较结果现实本文算法有效地提升最小角度，并将最小角度平均提升 18.2 度，避免了角度过小影响打印效率问题。

分形	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
因素	st(%)								ma(&)							
Z	2.2	1.6	2.9	1.7	3.2	0.3	2.1	2.2	0	0	0	0	0	0	0	0
C	2.1	3.0	1.9	2.0	1.4	0.5	2.4	2	3.3	8.6	10	4.9	7.6	16	2.4	3.2
CFS	1.8	1.3	1.9	1.7	1.4	0.4	2.1	1.5	25	15	15	36	26	24	11	33
O	1.6	1.2	1.6	1.5	0.9	0.3	1.5	1.4	34	21	19	25	28	25	14	36

表 5.2 急转弯比例统计。

(4) 填充 (欠填充和过填充) 比例

为了定量计算欠填充与过填充的比例，本文采取将线材直径加大的算法，计算过填充区域与欠填充区域占有所有填充区域的面积。计算四种算法在 8 个例子中的欠填充与过填充比例，如图5.8所示。从图5.8可看出，Zigzag 算法欠填充比例最低，而费马螺线填充算法欠填充比例最高。本文算法的欠填充比例比轮廓平行算法和费马螺线填充算法低，比 Zigzag 算法高 0.08%。从图5.8中表明本文算法的过填充的比例有小幅增加，针对八组数据，本文算法的过填充比例平均比轮廓平行算法和 Zigzag 平行算法低，比费马螺线填充算法高 0.04%。

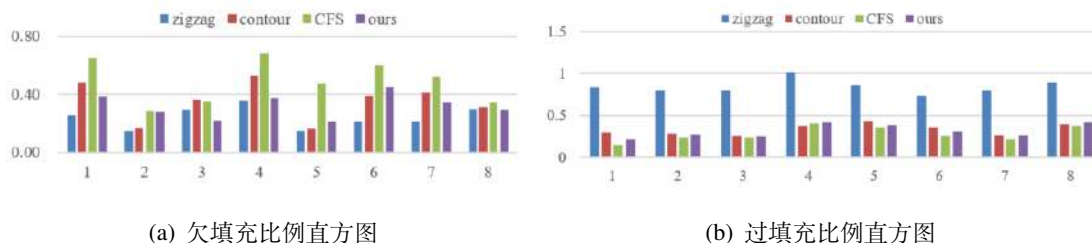


图 5.8 填充比例直方图。

(5) 打印成本

本文算法的时间和材料成本都是最低的。经过进一步的统计分析，在打印时间方面，本文算法较 Zigzag 算法平均节省了 16.41%，较轮廓平行算法平均节省

了 15.73%，较费马螺线填充算法平均节省了 5.1%。由于急转弯的比例低从而降低了打印时间。材料成本相对于 Zigzag 算法平均降低了 13.06%，较轮廓平行算法平均降低了 7.1%，较费马螺线填充算法平均节省了 3.7%。本文算法打印的整体工作效率从时间和耗材两个方面都得到了明显的提升。

分形	1	2	3	4	5	6	7	8
# Z_t	472	516	534	687	470	501	517	566
# C_t	512	486	563	663	509	469	476	545
# CFS_t	452	428	503	624	415	421	403	519
# O_t	414	421	473	616	408	417	391	428
# Z_m	2337	2913	3455	3715	2869	2096	3080	3313
# C_m	2256	2839	3366	3625	2788	2063	2972	3225
# CFS_m	2058	2651	3252	3370	2590	1869	2898	2832
# O_m	1989	2594	3053	3322	2511	1873	2569	2945

表 5.3 打印时间成本比较与打印耗材成本比较。

(6) 打印视觉效果

通过观察实际打印结果对比可得：使用 Zigzag 路径整体打印结果平整，出现部分拉丝现象（见图 5.9(a)），在平行线与边界相交处会产生过填充问题。对于细节区域往往不能保证边界的精度。对于轮廓平行算法，在相邻的等距线之间打印喷头经历上升与下降的过程会产生过填充现象。费马螺线填充算法在急转弯处出现欠填充现象。对比图 5.9(b), (c) 两种算法产生的边界和内部填充区域，费马螺线填充算法在打印时依旧保持边界的转角特征使得方框 1 中填充曲线拐点明显，然而本文算法避免了这种情况的发生，因为无论轮廓多么复杂总可以确定一个光顺的内层轮廓使得填充曲线在内部平滑从而节省了打印时间和打印材料成本。本文算法产生的模型内部填充更加光顺视觉效果更好。针对不同参数下的分形模型，更多打印结果见图 5.10。

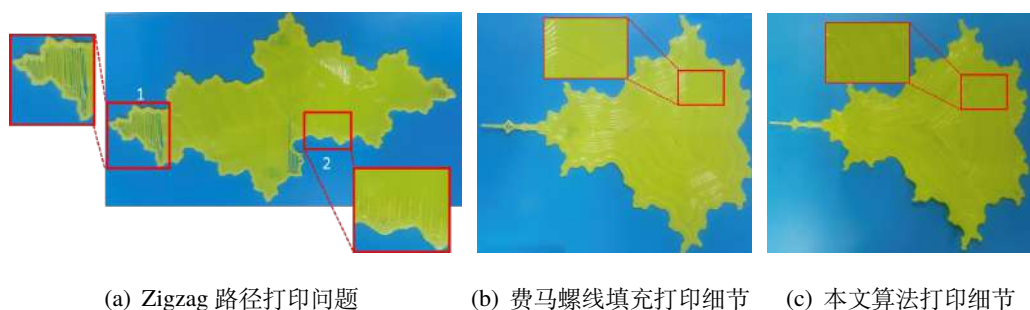


图 5.9 打印路径细节对比。

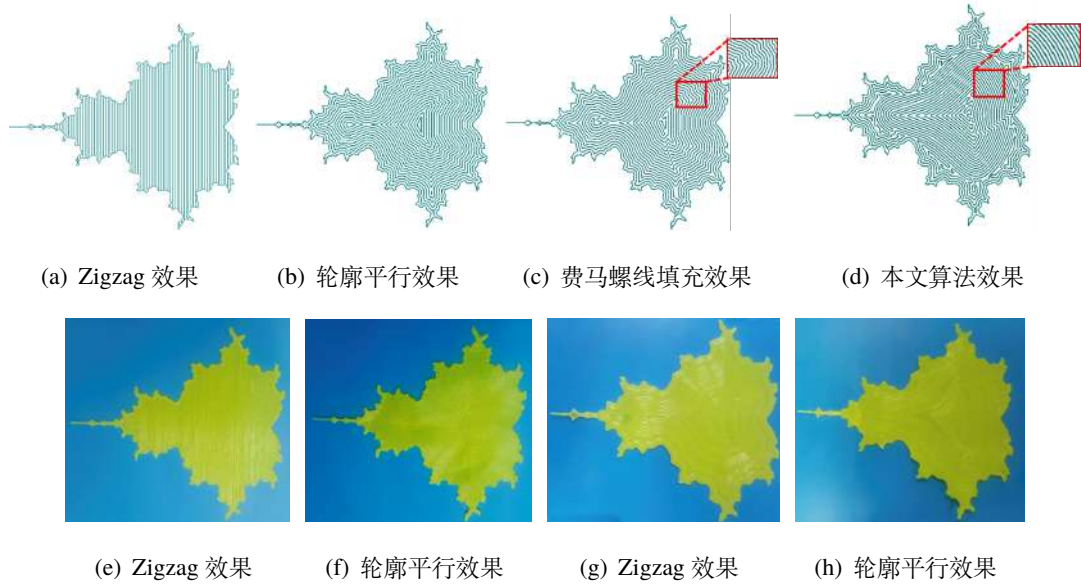


图 5.10 Mandelbrot 集打印结果。

5.3 拓扑复杂模型的打印路径规划

用传统的方法制造多孔结构非常困难，如减材制造技术。其本质上是使用切削工具沿着给定的路径切割材料。新兴的增材制造技术或 3D 打印技术提供了一个很好的替代方案。增材制造将复杂的三维模型转换为二维切片，然后逐层构建整个模型。因此，它特别适用于打印复杂模型。利用 3D 打印技术制造多孔结构的关键问题是为每一层设计合理的打印路径。本节的目标是提出一种新的路径规划方法来解决这一问题。

5.3.1 算法描述

为了方便理解，在此我们首先对算法进行整体概述。本文基于多孔模型的路径规划采用“分而治之”的思想，具体步骤为：

- 利用广义 Voronoi 图和对偶运算将填充域划分为一组子区域；
- 通过求解旅行商问题 (TSP) 找到连接所有子区域的路径；
- 利用最大近似椭圆原理合并子区域；
- 用优化后的费马螺旋曲线填充每个子区域，优化路径的平滑性和均匀性。

本文的算法流程如图 5.11 所示：

(1) 区域分割

令 D 为输入的 2D 切片， H_1, H_2, \dots, H_r 为 D 的内部孔洞。首先将 D 划分成 r 个子区域： D_1, D_2, \dots, D_r ，且每个 D_i 都包含一个孔 H_i 。给出如下定义

$$D_i := \{p \in D \mid d(p, \partial H_i) \leq d(p, \partial H_j), j = 1, \dots, r, j \neq i\}. \quad (5.4)$$

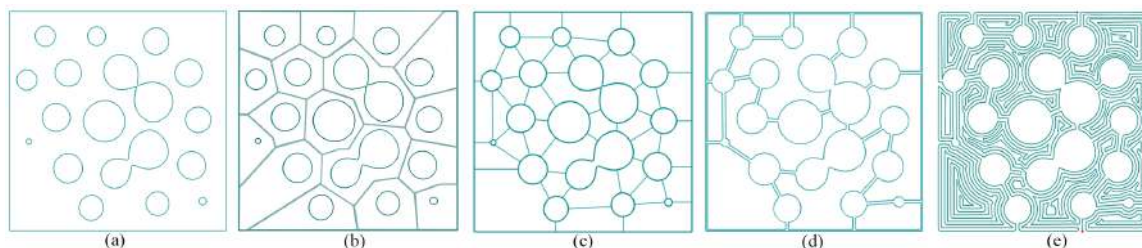


图 5.11 多孔结构路径规划的算法流程图。(a)2D 切片输入; (b) 将 2D 切片划分为若干子区域; (c) 对 (b) 中的分割结果实施对偶操作; (d) 区域的遍历与合并; (e) 利用费马螺旋线进行区域填充并优化;

也就是说 D_i 中的点到 H_i 比到其他任何孔洞的距离都小。 $\{D_i\}_{i=1}^r$ 为 D 的一系列子集。我们把它叫做生成式 Voronoi 图 (Generative Voronoi diagram, GVD)。

为了计算 D 的生成式 Voronoi 图, 在 D 内选取 m 个点 $q_j(j = 1, 2, \dots, m)$ 并且计算 q_j 到边界孔洞 H_i 的距离 $d(q_j, \partial H_i)$ 。如果对于 $i' = 1, 2, \dots, r, i' \neq i$ 都有 $d(q_j, \partial H_i) \leq d(q_j, \partial H_{i'})$, 那么 $q_j \in D_i$ 。因此, 问题转化为一个点到一洞的边界的距离计算。

令 $q_j = (x_j, y_j)$ 并且孔洞 H_i 可以表示为 $g_i(x, y) = 0$ 。此时 q_j 的垂足点 (x, y) 与边界 ∂H_i 的距离可以用如下公式计算:

$$g_i(x, y) = 0, \quad g_{ix}(x, y)(y - y_j) - g_{iy}(x, y)(x - x_j) = 0.$$

Newton-Raphson 方法可以有效地求解该方程组。当垂足点计算出来之后, 距离 $d(q_j, \partial H_i)$ 也就相应的可以获得。

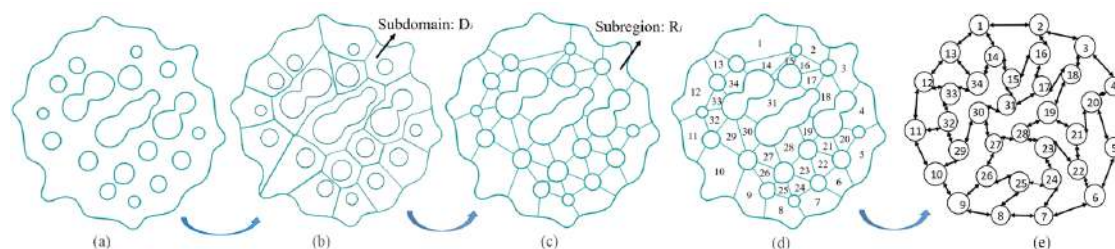


图 5.12 区域分割与遍历。(a) 输入的切片 D ; (b) D 的生成式 Voronoi 图; (c) D 被划分成若干子区域; (d) 将每个子区域进行标号; (e) 用无向图来表示区域分割后的子区域之间的连接关系;

(2) 区域遍历

在此, 我们期望可以找到一条连续路径来依次填充每个子区域 $\{R_i\}_{i=1}^k$ 。首先将 $D = \cup_{i=1}^k R_i$ 转化为一个图 $G = (V, E)$, 其中子区域 R_i 表示一个顶点 $v_i \in V$, 其次对于每一组相邻的子区域 R_i 和 R_j , 他们都对应一个有向边 $e_{ij}, e_{ji} \in E$ 。图 5.12 (e) 是 D 的图表示。现在问题转化为确定图 G 的一个有效路径并要求遍历所有的顶点有且仅有一次, 这等价于确定图 G 的哈密顿路径。理论上讲, 图 G 的任何一条哈密顿路径都给我们的算法提供了一个可行解。由于狭长的区域

的填充路径会产生一些急转弯点和填充不均匀的问题。我们的想法是尽可能地将狭长的子区域合并成大的子区域，然后按遍历顺序依次填充每个大的子区域。图 5.13 给出了子区域夹角的定义及合并过程。相邻区域的中心点与共同边的中点的连线所组成的夹角为相邻子区域的夹角。

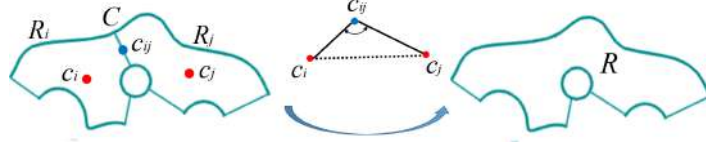


图 5.13 两个子区域夹角的定义和合并过程。

为了确定图 G 的哈密顿回路，我们在图 G 的每个边上构建权重 $w_{ij} = 1/(\sin(\theta_{ij}/2))^4$ ，其中 θ_{ij} ($0 < \theta_{ij} \leq \pi$) 是相邻区域 R_i 和 R_j 的夹角，且 $w_{ij} = w_{ji}$ 。我们的目标是在 G 中找到一个总权值最小的 Hamilton 路径。建立如下优化问题并利用遗传算法进行求解：

$$\arg \min f(x) = \sum_{(i,j) \in \Gamma} w_{ij} x_{ij}, \quad (5.5)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j \in N(i)} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad i \neq k_1, \quad (5.6)$$

$$\sum_{i \in N(j)} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad j \neq k_0. \quad (5.7)$$

其中 $\Gamma = \{(i, j) \mid e_{ij} \in E\}$, $N(i) = \{j \mid (i, j) \in \Gamma\}$ 是点 v_i 的索引指标，并且

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & e_{ij} \text{ 在哈密顿路径上,} \\ 0, & e_{ij} \text{ 不在哈密顿路径上.} \end{cases}$$

利用上述算法最终的遍历结果为：3 → 18 → 19 → 28 → 27 → 26 → 25 → 24 → 23 → 22 → 21 → 20 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11 → 12 → 33 → 32 → 29 → 30 → 31 → 17 → 16 → 15 → 14 → 34 → 13 → 1 → 2。

在某些情况下，图 G 可能没有哈密顿路径。在这种情况下，我们找到一条包含尽可能多的顶点的路径。然后将对应顶点不在路径中的子区域合并到对应顶点在路径中的子区域中。

(3) 区域合并

狭长的和面积小的打印区域往往有很大的急转弯比例并且会存在不均匀填充现象。如何将小的子区域合并成更大的便于打印的区域是本小节考虑的重点。通过上一小节提出的区域遍历算法，得到了包含整个域 D 的子区域序列 R_1, R_2, \dots, R_k 。我们的目标是将它们合并到一个更大的适宜打印的区域 R'_1, R'_2, \dots, R'_k 。我们通过以下特征来定义一个良好的打印区域：(1) 该区域尽

可能接近一个椭圆，并且长轴和短轴的长度之比在其上有一个常数的限制；(2) 区域为单连通域；(3) 区域边界尽量平滑。

对于一个区域 R ，我们首先利用一个椭圆 E 对 R 进行逼近。椭圆 E 的隐式表达式如下：

$$E(x, y) := e_1x^2 + e_2xy + e_3y^2 + e_4x + e_5y + e_6 = 0. \quad (5.8)$$

其中 $4e_1e_3 - e_2^2 = 1$ 。在 R 的边界上提取一系列的样本点 $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ 且其坐标为 $q_i = (x_i, y_i)$ 。然后建立优化模型使点集代数距离的平方和最小：

$$\min \sum_{i=1}^m E(x_i, y_i)^2, \quad (5.9)$$

$$s.t. \quad 4e_1e_3 - e_2^2 = 1. \quad (5.10)$$

这是带有 6 个变量 e_1, \dots, e_6 的二次规划问题并且求解简单。当得到近似椭圆 R 之后，我们使用单侧豪斯多夫距离来测量 R 与 E 的差异 $d(R, E)$ ：

$$d(R, E) := \max_{x \in \partial R} \min_{y \in \partial E} d(x, y).$$

两区域 R_1 和 R_2 若合并为一个区域 R 需要满足如下条件：

$$d(R, E) < b_E \quad \text{and} \quad a_E < 3b_E. \quad (5.11)$$

其中 a_E 和 b_E 是椭圆 E 的长半轴和短半轴。图 5.14 表示区域合并的过程，图 5.15 给出了区域合并的实例。

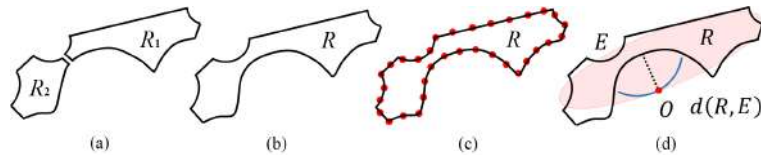


图 5.14 区域合并过程。(a) 连个相邻的子区域 R_1 和 R_2 ；(b) 区域合并 $R = R_1 \cup R_2$ ；(c) R 边界上的样本点；(e) 椭圆拟合和区域合并；

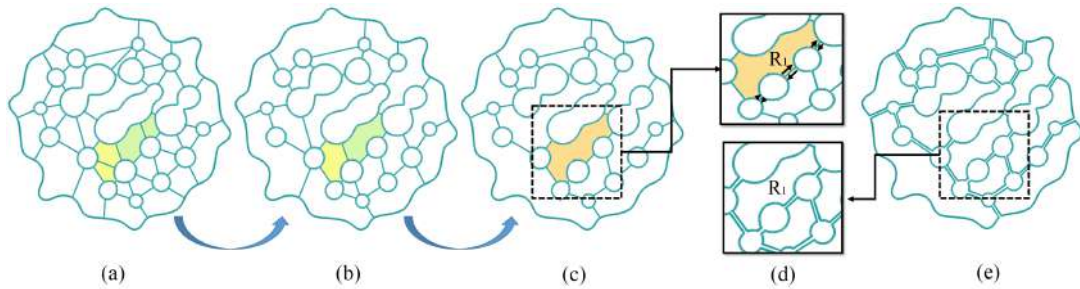


图 5.15 区域合并例子。(a) 原始分割区域；(b)-(c) 区域合并；(d) 细节显示；(e) 最后结果；

(4) 单个区域填充

通过前面的步骤，可以得到了一个子区域序列。现在的问题是如何针对单个区域进行路径填充。通过考虑两种情况来解决这个问题，将子区域划分为两类：一类是区域有一个局部最小值，另一类是区域有多个局部最小值。如果一个区域内所有的等值线(偏置线)在不同的值下有且仅有一条，则该区域具有单个局部最小值。否则，它被称为有多个局部极小值。

给定带有一个局部最小值的区域 R ，入口点 p_{in} 和出口点 p_{out} ，我们构造一个连续的费马螺线来填充区域 R 。主要步骤如下：

- 利用 Clipper 算法^[132] 计算一系列的偏置线 C_1, C_2, \dots, C_l ;
- 选取 C_0 上靠近点 p_{in} 的 p_{in-1} 使两点之间的距离为 d 。
- 选取 C_1 上的一点 p'_{in} 使得 $|p_{in}p'_{in}| = d$;
- 连接 p_{in-1} 和 p'_{in} ，并且删除 $p_{in}p_{in-1}$;
- 针对 p_{out} 和其他的偏置线都执行相同的操作，可以得到一个连续路径来填充区域 R ;

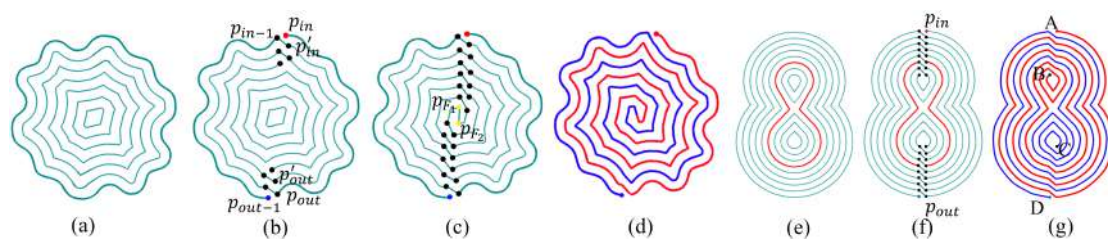


图 5.16 单个局部极值的区域的路径填充。(a) 原始区域; (b) 断开/连接规则; (c) 连接指定点; (d) 最后结果; (e)-(g) 表示该规则不应用于多个局部极点区域;

令 R 表示多个局部极点的区域。现在区域 R 中构造一条连续路径，具体步骤如下：

- 利用 Clipper 算法^[132] 计算一系列的偏置线 C_1, C_2, \dots, C_l ;
- 确定第一个使得结构拓扑变化的 C_m (图5.17(a)中的红色曲线)。 C_0 与 C_m 之间的区域定义为 S_0 ;
- 利用连续路径填充区域 S_0 ; 增加一段等距线 $C_{m,m+1}$ 在 C_m 与 C_{m+1} 之间以保证 C_m 与 C_{m+1} 的连接性。
- 利用一条连续路径填充区域 $R \setminus S_0$;
- 连接两个区域 S_0 和 $R \setminus S_0$ 的填充路径;

5.3.2 结果分析与讨论

实验基于熔融沉积成型 (FDM) 技术且操作平台是在 Ultimate 2+。实验使用默认打印机设置，喷嘴直径 0.4mm，层厚度 0.2mm，最大喷嘴速度 80mm/s，打印材料的挤出直径为 2.85mm。算法测试的电脑配置为 Inter(R) Core TM i7-4790

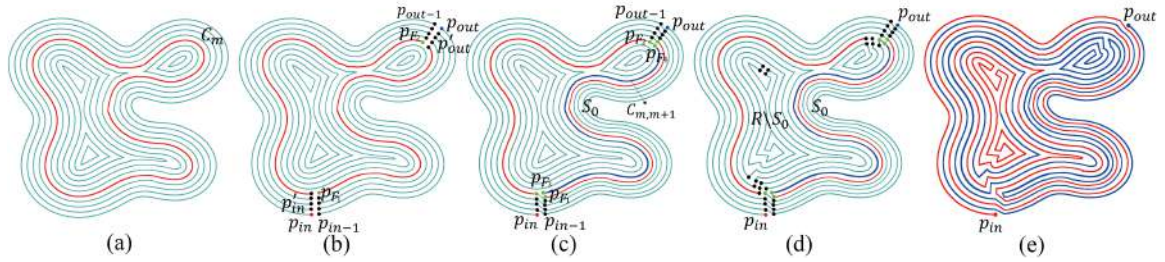


图 5.17 填充带有三个局部极点的区域。(a) 确定区域 R 的等距线；(b) 确定区域 S_0 内的连接点；(c) 添加一条等距线段以保证全局连接；(d) 利用一条连续路径填充区域 $R \setminus S_0$ ；(e) 最后结果；

3.6GHz CPU 8GB RAM。目前常用的评估因素有时间 (计算时间 (ct)、打印时间 (pt))、材料成本 (m)、路径分割数 (不连续路径的个数)、急转弯比例 (st)、填充比例 (过填充比例 (of) 和欠填充比例 (uf)) 以及视觉效果等。在本文加入了结构性能的衡量。本文比较了 Zigzag 路径填充算法 (Z)、轮廓平行填充算法 (C)、全局连续的费马螺线填充算法 (CFS)，并分析其各自的优劣。

(1) 拓扑复杂模型

拓扑复杂的模型来源有两种：一种是点云扫描重建，一种是由用户进行仿真模拟。对该模型的均匀切片作为本文的输入。在此本文重点讨论第二种构建方法。在计算机辅助设计中，NURBS 是表示几何对象的标准工具，它是原始模型的一种参数化表示。然而，对几何和拓扑复杂的结构如多孔结构进行 NURBS 建模是一个非常困难的任务。多边形建模是几何建模中另一种常见的建模形式。多边形建模的基本要素是点、线和面。其主要思想是将实体用多边形模型进行近似。然而，要以可接受的精度来模拟一个多孔结构，需要大量的多边形近似。参数化建模和多边形建模在 3D 打印中各有不足。将三维参数化或多边形模型转换为二维切片，往往会出现几何和拓扑错误，从而导致打印错误甚至失败。相比之下，隐式表示非常适合具有任意拓扑结构和内部结构的复杂几何的建模^[133]。

在本节，我们提出一种基于隐式函数表示的多孔结构构建方法。首先，我们用三元 B 样条函数来表示多孔结构的边界：

$$f_b(x, y, z) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^l c_{ijk} N_i(x) N_j(y) N_k(z) = 0, \quad (5.12)$$

其中 $\{c_{ijk}\}_{i,j,k=0}^{m,n,l}$ 是控制系数， $N_i(x)$, $N_j(y)$, $N_k(z)$ 是沿着 x , y , 和 z 方向的 B 样条基函数，且 B 样条的次数为 d_1, d_2, d_3 。在本文中，我们选取 $d_1 = d_2 = d_3 = 3$ 。

接下来，内部的孔洞我们用 Blobby 模型来表示^[134]。用 $\mathbf{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ 表示模型 M 中的一系列点，其中 $p_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ 。在此我们定义

针对点 p_i 的势函数为:

$$f_i(x, y, z) = \begin{cases} 1 - \frac{3d_i^2}{r_i^2}, & 0 \leq d_i < \frac{r_i}{3}, \\ \frac{3}{2}(1 - \frac{d_i}{r_i})^2, & \frac{r_i}{3} \leq d_i < r_i, \\ 0, & r_i \geq d_i. \end{cases} \quad (5.13)$$

其中

$$d_i^2 = \|q - p_i\|^2 = \frac{(x - x_i)^2}{a_i^2} + \frac{(y - y_i)^2}{b_i^2} + \frac{(z - z_i)^2}{c_i^2},$$

$$f_{in}(x, y, z) := \sum_{i=1}^N f_i(x, y, z) - \kappa = 0, \quad (5.14)$$

其中 κ 是一个常数。不同的 κ 对应不同的 Blobby 模型。图5.18表示不同 κ 值对应的等值面。

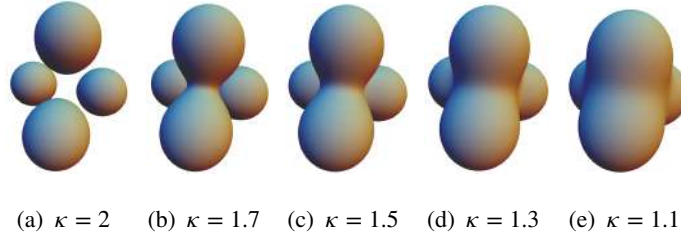


图 5.18 不同 κ 值对应的等值面。

因此，多孔结构可以用如下的隐式函数表示:

$$f(x) = \max(f_b, -f_{in}). \quad (5.15)$$

$f(x)$ 表示两个隐式函数 $f_b = 0$ 和 $f_{in} = 0$ 的布尔运算。

针对给定的模型 M ，我们可以将模型 M 转化为三次 B 样条函数^[135]。通过有限元分析，对种子点的位置和半径进行优化确定孔内结构。在本文我们使用 Lloyd's 松弛法^[136] 随机生成种子点 P 。为了确定点 p_i 的半径 r_i ，我们计算种子点的 Voronoi 图，并计算从 p_i 到 Voronoi 细胞 (多面体) 内壁的最短距离 h_i ，设置 $r_i = e_i \times h_i$ ，其中 e_i 是在 $[0, 1]$ 之间的随机数。除此之外， a_i, b_i, c_i 是介于 0.5 到 1.5 之间的数。图5.19展示了多孔结构的生成过程。

为了获取路径规划的输入，对于隐式函数产生的多孔结构我们利用增量法来实现均匀切片操作^[137]。图5.20展示了多孔结构的切片结果。依据上述方法，本文的测试模型如图 5.21所示:

(2) 打印成本比较

打印成本包括时间成本和材料成本。其中时间成本又分为算法的计算时间成本和路径的打印时间成本。针对算法的计算效率这一指标，传统的路径规划的

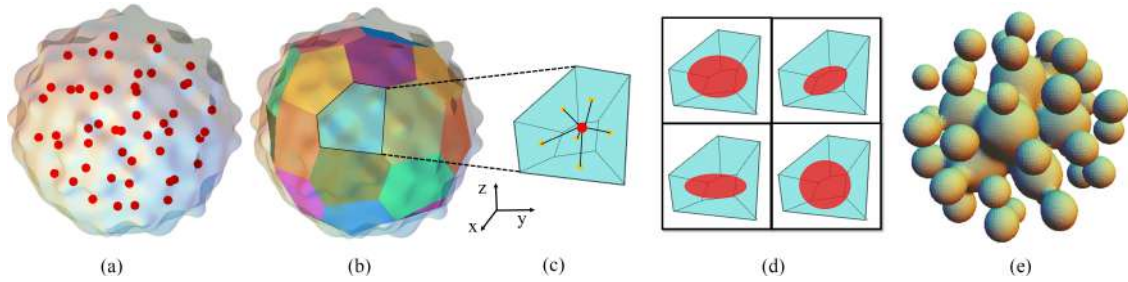


图 5.19 多孔结构生成过程。(a) 模型内部的种子点; (b) 针对每个种子点产生的 Voronoi 单胞; (c) 一个单胞; (d) 单胞内的 Blobsy 模型; (e) 基于 Blobsy 模型产生的内部结构。

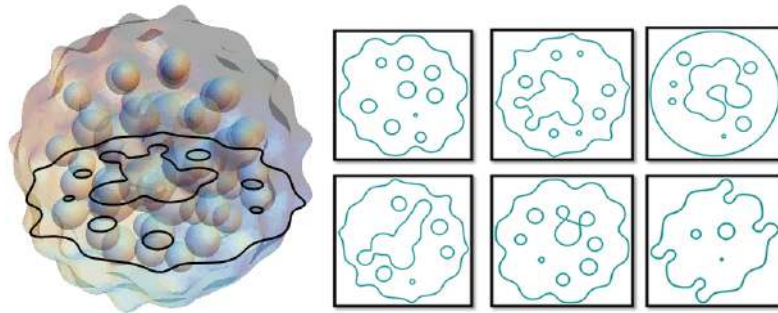


图 5.20 多孔结构的切片结果。

计算效率明显优于全局费马螺线算法与本文算法。打印时间是衡量 3D 打印效率的一个重要因素。表5.4中的列 6-9 显示了这四种算法对十个例子的单层的实际打印时间(以秒为单位)。由此可见,本文算法在所有示例中打印时间最少,与其他三种方法相比,本文算法平均分别节省 19%、15% 和 11% 的打印时间。

指标	计算时间 (s)				打印时间 (s)				材料成本 (mm)			
	Z_{ct}	C_{ct}	CFS_{ct}	O_{ct}	Z_{pt}	C_{pt}	CFS_{pt}	O_{pt}	Z_m	C_m	CFS_m	O_m
<i>sphere</i>	0.021	0.496	18.096	4.158	804	783	756	692	2692	1325	1243	1162
<i>pear</i>	0.020	0.565	18.769	5.115	565	544	524	473	1827	686	646	628
<i>duck</i>	0.018	0.466	15.431	3.178	683	649	621	558	9390	4725	4693	4492
<i>kitten</i>	0.053	0.861	20.156	5.291	587	545	492	412	5537	2884	2781	2473
<i>torus</i>	0.022	0.520	18.887	3.461	628	606	589	537	2572	1206	1193	1169
<i>mrhumpty</i>	0.013	0.431	15.381	4.869	821	796	789	722	12009	5867	5893	5816
<i>homer</i>	0.041	1.056	22.469	8.305	864	837	796	753	7746	4297	4184	4066
<i>venus</i>	0.063	1.534	64.564	26.087	562	574	558	542	11231	5562	5613	5196
<i>penguin</i>	0.028	0.948	19.914	8.922	786	745	736	619	12693	5842	5819	5623
<i>monkey</i>	0.019	0.731	15.850	4.604	829	847	802	725	7592	4356	4595	3913

表 5.4 四种算法在算法时间 (at)、打印时间 (pt) 和长度 (l) 下的比较结果。

多孔结构通常应用于材料非常昂贵的航空航天和生物医学领域。为了满足轻量化和成本最小化的要求,降低材料成本是非常重要的。对于上面提到的四种不同的路径填充算法,本文在表5.4的第 10-13 列中展示了在相同填充率下十个例子的材料成本。表5.5显示了三种方法的相对平均材料成本。由表5.5可以看出,我们的算法消耗的材料最少,与 Zigzag 路径规划算法相比,我们的算法的材料

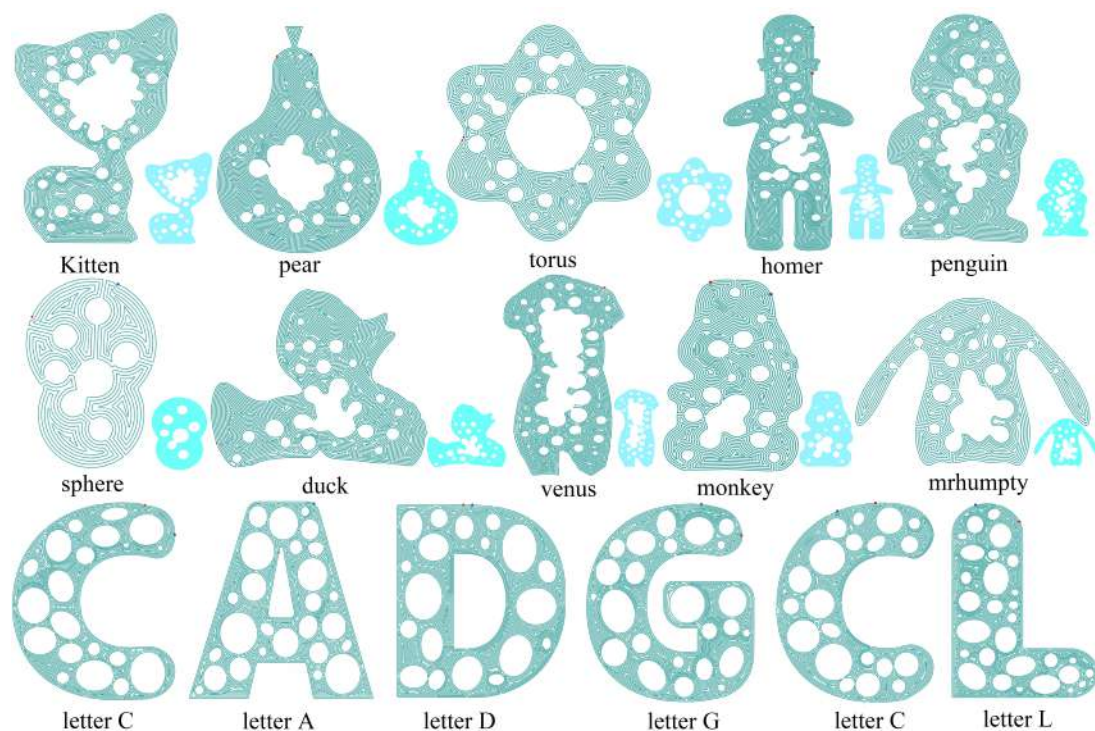


图 5.21 本文算法的路径填充实例。

消耗还不到其算法的一半。其原因为 Zigzag 路径和轮廓平行路径的不连续性造成的材料浪费。考虑到一个模型通常由数百甚至数千层组成，我们的方法所节省的材料是非常可观的。

方法	Zigzag 路径	轮廓平行路径	CFS 路径	本文算法
相对材料成本	2.21	1.18	1.12	1.00

表 5.5 四种算法的相对材料平均成本。

(3) 结构性能

本文利用四种路径生成方法测试了三个模型（‘C’，‘A’，‘D’见图5.22）的结构稳定性。压力测试在通用的机电试验机 (MTS809) 上进行，以便评估打印模型的物理性能即在某些点或面的强度，如图5.22(右)所示。测试机器的压力测试头以 1mm/min 的恒定速度移动，输出恒定的压力。本文记录了每个模型的最大可承受应力。表5.6显示了各模型的重量、最大应力以及最大应力与重量之比。

表5.6中可以看到，Zigzag 路径规划算法的最大应力随打印方向或施力方向的不同而产生很大的变化。在最坏的方向上，Zigzag 路径填充的模型的应力比本文算法的应力低至 50%-70%。另一方面，我们的方法在其他三种方法中产生的压力最大。用我们的方法计算的每单位重量的承载能力的优势更加明显。

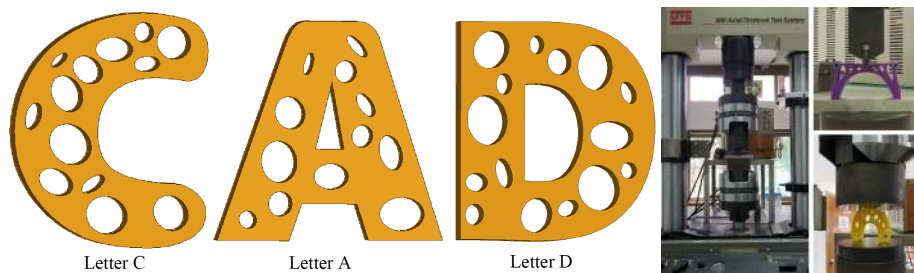


图 5.22 结构性能测试。(左)CAD 测试模型;(右)利用 MTS809 进行压力测试;

模型 方法	模型 C				模型 A				模型 D			
	Z	C	CFS	O	Z	C	CFS	O	Z	C	CFS	O
重量 (g)	17.35	15.81	14.32	13.18	17.16	14.85	14.21	13.12	14.54	12.76	12.31	11.68
	19.23				15.28				13.17			
应力 (N)	1433	1307	1294	1338	1749	1291	1235	1390	1327	912	931	1124
	1108				1003				847			
应力-重量比	82.59	82.67	90.36	101.52	101.92	86.94	86.91	105.95	91.27	71.47	75.63	96.23
	57.62				65.64				64.31			

表 5.6 用四种路径生成方法计算 3 种模型的应力-重量比。

(4) 路径连续性与急转弯比例

在5.2.2节已经介绍了路径的连续性与急转弯的影响，两者的出现会对打印过程造成的影响在此不再赘述。3D 打印会在急转弯区域出现速度不均匀的情况，这样会造成时间和材料的浪费，影响打印质量。降低急转弯率和实现路径的全局连接以保证打印的效率和精度。表5.5显示本文算法在这两个指标的评判下表现最好。全局费马螺旋路径与本文路径的路径分割数均为 1。

输入	Z _{seg}	C _{seg}	Z _{st}	C _{st}	CFS _{st}	O _{st}	输入	Z _{seg}	C _{seg}	Z _{st}	C _{st}	CFS _{st}	O _{st}
<i>sphere</i>	84	113	9.32%	4.51%	4.31%	4.08%	<i>mrhumpty</i>	92	70	9.13%	5.27%	5.04%	4.87%
<i>pear</i>	53	107	8.24%	5.82%	5.54%	5.17%	<i>homer</i>	126	98	9.82%	4.83%	4.97%	3.78%
<i>duck</i>	86	112	7.65%	4.19%	4.12%	3.75%	<i>venus</i>	112	142	9.61%	4.15%	4.25%	4.09%
<i>kitten</i>	175	114	8.81%	5.89%	5.62%	5.03%	<i>penguin</i>	178	148	8.07%	4.62%	4.39%	4.46%
<i>torus</i>	158	86	7.29%	4.58%	4.13%	3.64%	<i>monkey</i>	76	63	7.96%	3.73%	3.83%	3.12%

表 5.7 路径分割数与急转弯的比例。

(5) 填充比例比较

填充比例会对打印质量造成直接影响。为了定量地计算欠填充与过填充的比例，本文把打印路径看作是一条具有预设宽度(喷嘴直径)的曲线。不断地增大路径的宽度，路径会在过填充区域相交，并在欠填充区域产生间隙。计算交叉面积和空隙的比例，得到欠填充和过填充的比例。图5.23(a)和(b)中的直方图显示了十个例子中四种算法的欠填充和过填充比例。从图中可以看出，Zigzag 路径的欠填充比例最小，但过填充比例最高。轮廓平行路径由于在计算中产生的细小的等距线导致填充不均匀。CFS 路径出现更多的欠填充现象。与 CFS 算法和轮

廓平行算法相比，本文算法产生的过填充和欠填充均最少。

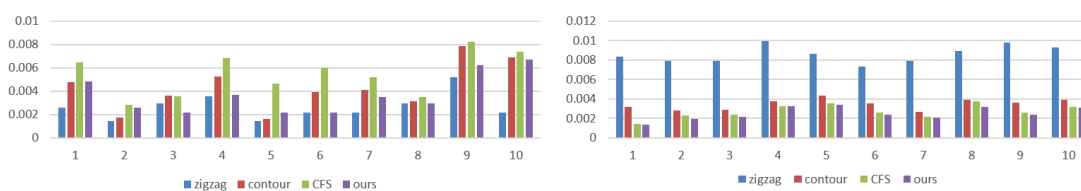


图 5.23 测试算例的欠填充比例(左)与过填充比例(右)的比较。

(6) 视觉效果

视觉效果是许多因素的综合体现。为了评估现有方法的视觉效果，本文进行了用户调研。我们邀请了 20 位用户对十个例子的视觉效果进行打分。1 表示视觉效果最差，10 表示视觉效果最好。平均评级结果如图 5.24 所示。从直方图可以得出结论，本文方法产生了最好的视觉效果。

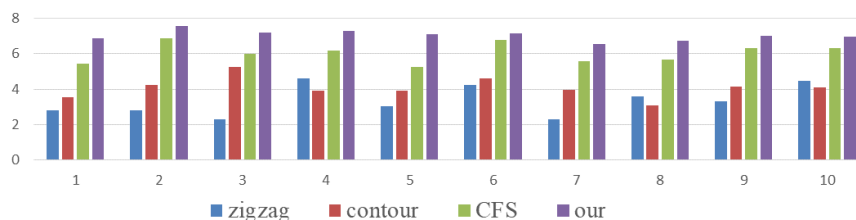


图 5.24 针对十个例子四种算法的视觉效果评分柱状图。

图 5.25 展示了四种方法生成两个模型(桥梁结构/鸭子)的路径，而图 5.26 展示了模型的实际打印结果。从结果可以看出，Zigzag 路径打印均匀，但是在模型边界处出现阶梯现象。轮廓平行路径规划算法对阶梯现象进行了改进。然而，对于这两种方法，由于路径的不连续，打印材料可能会从原本的路径中断开产生拉丝现象。CFS 方法产生更多的欠填充情况。相比之下，本文方法生成的路径更加均匀、平滑，可以有效地减少欠填充和阶梯现象。

5.4 本章小结

随着 3D 打印技术的快速发展，人们对打印的模型要求也越来越高，本章针对复杂模型的路径规划问题进行研究。首先将复杂模型划分为边界复杂模型和拓扑复杂模型。在边界复杂模型的研究中，我们旨在保证精度的前提下改善填充路径以提升 3D 打印的效率。在拓扑复杂的研究中，本文利用隐式函数表示模型复杂的拓扑结构，然后利用均匀切片算法获取二维切片输入。本文采用“分而治之”的思想进行路径规划。

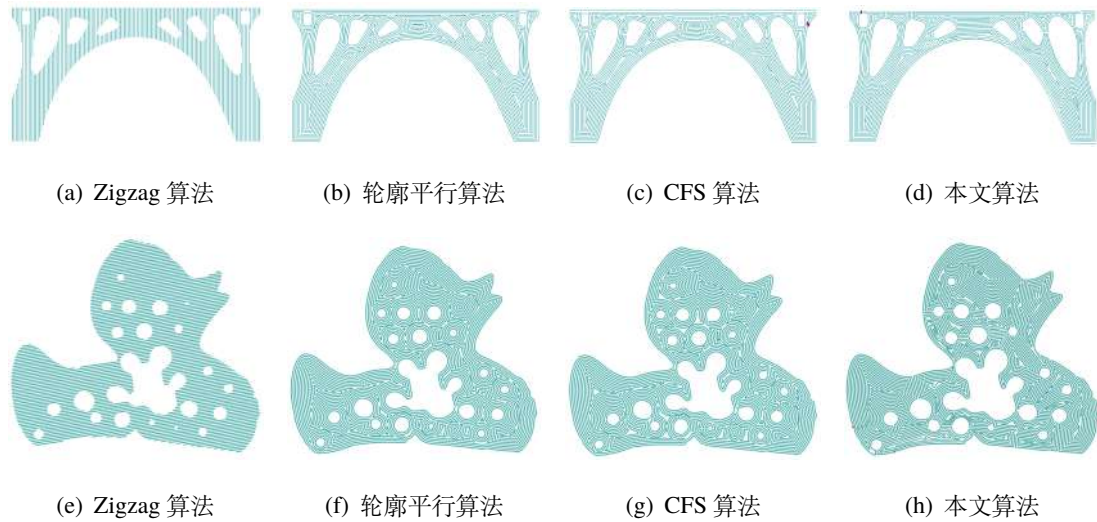


图 5.25 利用四种路径规划方法分别对桥梁结构和鸭子模型进行路径填充。

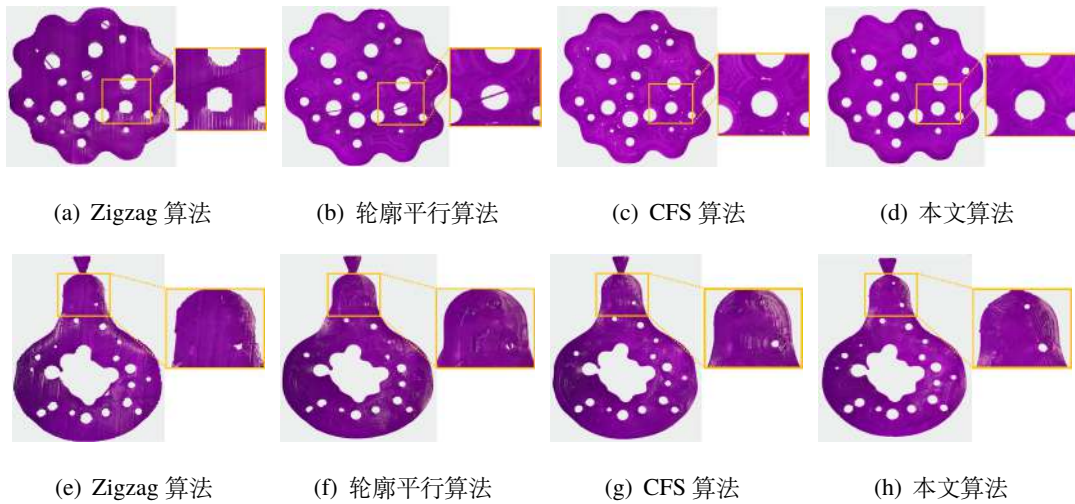


图 5.26 花模型和梨模型的实际打印效果。

本章的第一小节首先介绍了对于边界复杂模型产生自适应边界的填充路径的步骤：①轮廓层路径填充；②过渡层优化；③过渡层与内层费马螺旋线连接；④全局填充路径的光顺与位置优化。其次分别从填充路径的分割数，路径角度（急转弯比例与最小角度），填充的均匀程度（过填充与欠填充比例），打印成本（时间和耗材）和打印效果五个方面对本文算法进行检验，得到了较好的结果。本文算法不仅针对分形，而且对任意不同复杂程度的边界模型都可以在保证边界特征的同时生成一条全局连续的填充曲线。在今后的工作中将会针对过渡层的欠填充问题设计优化策略，针对填充曲线进一步改进。

本章的第二小节提出了一种针对含有大量小孔的多孔结构的打印路径生成方法。本文算法首先将切片区域划分为若干子区域，利用遗传算法求解旅行商（TSP）问题，然后用费马螺旋曲线填充每个子区域。通过算例说明了该方法的有

效性和鲁棒性，并与其他三个路径规划方法进行了比较。实验结果表明，该算法在材料成本、打印时间和结构稳定性等方面均优于其他方法。在今后的工作中，我们将对多孔结构的拓扑优化进行研究，这是一个非常重要的研究课题。

第6章 总结和展望

6.1 本文工作总结

本文对“结构设计”与“增材制造”两个关键词展开研究，结构设计作为增材制造的输入为实体制造的多样性提供了更多的可能。广义上讲结构设计的产生是由制造所驱动的。增材制造作为实体制造的手段促进了结构设计的蓬勃发展。两者相辅相成，是工业制造的两个重要环节。本文首先介绍了增材制造的技术分类和研究意义，并根据打印流程得到其几何优化问题：输入模型优化(结构设计)，切片优化，路径优化和其他优化。本文重点介绍了路径规划的发展历程，并且对于其他几何优化问题的发展进行了简要的回顾。本文随后介绍了结构设计的分类及其研究意义，其次从离散体结构优化，连续体结构优化和微结构的拓扑优化三个方面阐述了结构设计的发展历程。现代工业发展正面临着材料资源短缺，环境影响大以及技术竞争多等难题，更轻质、更低成本且满足可持续发展要求的结构逐渐称为行业刚需，而积极推动结构优化技术的发展正是打破困境的关键一环。与此同时，增材制造为结构设计提供了新的机遇。本文主要完成的研究成果总结如下：

(1) 交替方向算法求解带有应力约束的拓扑优化

本文基于增广拉格朗日方法提出交替方向选择算法，该算法采用两组优化变量(即针对每个单元有一个辅助应力变量，以及一个传统密度算法中的密度变量)。辅助应力通过一个等式约束与实际应力相关联。辅助应力等式约束通过增广拉格朗日函数中的线性项和二次项合并到目标函数中。将应力作为优化变量，结合密度变量扩充了设计域(搜索空间)。在每次迭代中，密度变量、辅助应力变量和拉格朗日乘子交替更新。通过与移动渐近法(MMA)及其全局收敛格式(GCMMA)的比较，证明了该方法的有效性。

(2) 可微的微结构设计

本文提出了“可微的微结构”的概念。可微的微结构是由一组参数控制的，它们的物理性质(泊松比，体积模量)和几何结构关于这组参数是可微的。在本文中，微结构是由高度场控制，每个高度的截面对应唯一微结构。物理场产生局部极大值点和马鞍点会造成物理性质沿高度方向的不连续性。利用热传导方程模拟温度传播的过程来避免物理场的局部极大点与马鞍点的产生。本文以单元传热系数为自变量，选取若干个关键微结构的物理特性(体积模量)的和为目标函数，热传导方程为正则化约束。通过实验证实本文算法可以产生期望的可微的微结构，相比于均匀形态学扩张算法与均匀传热系数的温度场投影算法其微结构序列更接近 Hashin-Shtrikman 上限。

(3) 复杂模型的路径规划

目前的路径规划模型具有普适性的特点, 而针对复杂模型的路径规划应该特殊对待。本文首先将复杂模型划分为边界复杂模型和拓扑复杂模型。边界复杂模型的路径规划研究的研究重点是在保证精度的前提下改善填充路径以提升 3D 打印的效率。拓扑复杂的路径规划研究重点是路径如何跨过孔洞实现全局连接。本文将复杂的模型简单化, 通过对简单区域进行路径填充然后进行全局连接以达到复杂模型的路径填充的目的。通过算例说明本文方法的有效性和鲁棒性, 并与传统的路径规划方法 (zigzag 填充路径, 轮廓平行填充路径和全局连续的费马螺线填充路径) 进行了比较。实验结果表明, 该算法在材料成本、打印时间和结构稳定性等方面均优于其他方法。

6.2 未来工作展望

本文虽然针对上述三个问题进行了深入分析, 但是仍有许多科学问题和技术难题亟待进一步的探索。对于本文的研究问题, 可以在以下五个方面进行完善和挖掘:

(1) 带有应力约束的大规模拓扑优化计算问题

应力约束作为拓扑优化领域中非常重要的一个分支。第三章重点分析了带有应力约束的拓扑优化的三大挑战与难点: 局部性, 奇异性和高度非线性。目前本文针对一些简单的连续体结构进行数值测试, 然而在实际应用中尤其是航空航天等其他领域中连续体结构规模巨大, 相应地其应力约束问题的求解计算量面临着巨大的挑战。如何求解大规模的带有应力约束的拓扑优化问题将成为下一个研究重点。

(2) 带有应力约束的微结构设计

本文第三章从宏观尺度入手求解连续体结构的带有应力约束的拓扑优化问题。后续的工作期望从微尺度结构出发, 研究微结构的应力约束问题。如何把交替优化算法应用于带有应力约束的微观材料结构设计中可以成为有待研究的方向。将微结构组合而成的宏观结构与直接对宏观连续体结构的带有应力约束的优化进行对比, 分析各自优缺点。

(3) 可微的微结构设计的推广

本文针对二维的可微的微结构进行研究, 利用温度场代替高度场进行优化计算。目前, 利用本文的算法得到的二维的可微微结构的物理性质接近 Hashin-Shtrikman 理论值上限。在未来的工作中, 我们期望探讨如何设计三维的可微微结构。构建的物理场可以通过不同参数的投影得到不同的三维微结构。针对其进一步的分析与讨论。

(4) 考虑应力约束的路径规划算法

目前的路径规划算法是切片填充算法,旨在高效均匀地填充切片轮廓。然而在实际的打印过程中还涉及到应力和材料热变形等问题。Yang 等人^[138]对熔融沉积建模中温度场和应力场进行数值模拟,通过研究发现路径填充对于实体的受力情况会产生非常重要的影响。然而在大多数路径规划的设计算法中并没有考虑应力及热变形情况。在未来的工作中,是否可以通过填充路径的变化来避免或者缓解应力集中及热变形现象是值得探索的研究方向。如何将应力及热变形纳入路径规划的因素中将成为重要的研究课题。

(5) 多孔结构的生成

本文第五章讨论复杂模型的路径生成算法,利用隐式函数来表示拓扑复杂的模型是行之有效的方法。模型内部的复杂结构利用 blobby 模型进行仿真,每个 blobby 模型都用一个中心点坐标和半径两个参数来控制。由于本文主要探讨路径规划算法,拓扑复杂的模型的参数是随机生成的。实际上,拓扑复杂的结构可以通过构建优化模型进一步优化得到。该模型以隐式函数中的参数为自变量,以结构的物理特性为目标函数并对其施加平衡方程的约束进行优化。多孔结构的生成仍然需要进一步的探索与验证。

参 考 文 献

- [1] CONNER B P, MANOGHARAN G P, MARTOF A N, et al. Making sense of 3-d printing: Creating a map of additive manufacturing products and services[J]. Additive Manufacturing, 2014, 1:64-76.
- [2] LIPSON H, KURMAN M. 3D 打印: 从想象到现实[M]. Zhong xin chu ban she, 2013.
- [3] 吴怀宇. 3D 打印: 三维智能数字化创造[M]. 电子工业出版社, 2017.
- [4] 徐文鹏, 苗龙涛, 刘利刚. 面向 3D 打印的结构优化研究进展[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2017, 29(07):1155-1168.
- [5] THRIMURTHULU K, PANDEY P M, REDDY N V. Optimum part deposition orientation in fused deposition modeling[J]. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 2004, 44(6):585-594.
- [6] DAS P, MHAPSEKAR K, CHOWDHURY S, et al. Selection of build orientation for optimal support structures and minimum part errors in additive manufacturing[J]. Computer-Aided Design and Applications, 2017, 14(sup1):1-13.
- [7] LUO Z, YANG F, DONG G, et al. Orientation optimization in layer-based additive manufacturing process[C]//International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference: volume 50077. American Society of Mechanical Engineers, 2016: V01AT02A039.
- [8] JIANG J, XU X, STRINGER J. Support structures for additive manufacturing: A review [J/OL]. Journal of Manufacturing and Materials Processing, 2018, 2(4). <https://www.mdpi.com/2504-4494/2/4/64>. DOI: 10.3390/jmmp2040064.
- [9] VANEK J, GALICIA J A G, BENES B. Clever support: Efficient support structure generation for digital fabrication[C]//Computer graphics forum: volume 33. Wiley Online Library, 2014: 117-125.
- [10] SCHMIDT R, UMETANI N. Branching support structures for 3d printing[M]//ACM SIGGRAPH 2014 Studio. 2014: 1-1.
- [11] SHEN Z, DAI N, LI D, et al. Generation of branching support structures based on critical constraint[J]. China Mech. Eng, 2016, 27:1107-1112.
- [12] SHEN Z H, DAI N, LI D W, et al. Bridge support structure generation for 3d printing[C]//Materials, Manufacturing Technology, Electronics and Information Science (MMTEI2015) Proceedings for the 2015 International Workshop on Materials, Manufacturing Technology, Electronics and Information Science (MMTEI2015). World Scientific, 2016: 141-149.
- [13] GAN M, WONG C. Practical support structures for selective laser melting[J]. Journal of

- Materials Processing Technology, 2016, 238:474-484.
- [14] LEARY M, MERLIL L, TORTI F, et al. Optimal topology for additive manufacture: A method for enabling additive manufacture of support-free optimal structures[J]. Materials & Design, 2014, 63:678-690.
- [15] XIE Y, CHEN X. Support-free interior carving for 3d printing[J]. Visual Informatics, 2017, 1(1):9-15.
- [16] KARASIK E, FATTAL R, WERMAN M. Object partitioning for support-free 3d-printing [C]//Computer Graphics Forum: volume 38. Wiley Online Library, 2019: 305-316.
- [17] HAO J, FANG L, WILLIAMS R E. An efficient curvature-based partitioning of large-scale stl models[J]. Rapid Prototyping Journal, 2011.
- [18] CHEN D, SITTHI-AMORN P, LAN J T, et al. Computing and fabricating multiplanar models [C]//Computer graphics forum: volume 32. Wiley Online Library, 2013: 305-315.
- [19] 刘利刚, 徐文鹏, 王伟明, 等. 3D 打印中的几何计算研究进展[J]. 计算机学报, 2015, 38(06):1243-1267.
- [20] XIN S, LAI C F, FU C W, et al. Making burr puzzles from 3d models[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2011, 30(4):1-8.
- [21] SONG P, FU C W, COHEN-OR D. Recursive interlocking puzzles[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(6):1-10.
- [22] ZHU L, XU W, SNYDER J, et al. Motion-guided mechanical toy modeling[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(6):1-10.
- [23] COROS S, THOMASZEWSKI B, NORIS G, et al. Computational design of mechanical characters[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2013, 32(4):1-12.
- [24] CALÌ J, CALIAN D A, AMATI C, et al. 3d-printing of non-assembly, articulated models[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(6):1-8.
- [25] BÄCHER M, BICKEL B, JAMES D L, et al. Fabricating articulated characters from skinned meshes[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(4):1-9.
- [26] CHEN Y, ZHEZHENG C. Joint analysis in rapid fabrication of non-assembly mechanisms [J]. Rapid Prototyping Journal, 2011.
- [27] BAUMANN F, BUGDAYCI H, GRUNERT J, et al. Influence of slicing tools on quality of 3d printed parts[J]. Computer-Aided Design and Applications, 2016, 13(1):14-31.
- [28] SIRASKAR N, PAUL R, ANAND S. Adaptive slicing in additive manufacturing process using a modified boundary octree data structure[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2015, 137(1).
- [29] WANG W, CHAO H, TONG J, et al. Saliency-preserving slicing optimization for effective 3d printing[C]//Computer Graphics Forum: volume 34. Wiley Online Library, 2015: 148-160.

- [30] DING D, PAN Z S, CUIURI D, et al. A tool-path generation strategy for wire and arc additive manufacturing[J]. The international journal of advanced manufacturing technology, 2014, 73 (1-4):173-183.
- [31] YANG Y, LOH H T, FUH J, et al. Equidistant path generation for improving scanning efficiency in layered manufacturing[J]. Rapid Prototyping Journal, 2002.
- [32] LIN S, XIA L, MA G, et al. A maze-like path generation scheme for fused deposition modeling[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2019, 104(1): 1509-1519.
- [33] ZHAO H, GU F, HUANG Q X, et al. Connected fermat spirals for layered fabrication[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2016, 35(4):1-10.
- [34] BROOKS B J, ARIF K M, DIRVEN S, et al. Robot-assisted 3d printing of biopolymer thin shells[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2017, 89(1): 957-968.
- [35] WU C, DAI C, FANG G, et al. Robofdm: A robotic system for support-free fabrication using fdm[C]//2017 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA). IEEE, 2017: 1175-1180.
- [36] Wu C, Dai C, Fang G, et al. General support-effective decomposition for multi-directional 3-d printing[J/OL]. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, 2020, 17 (2):599-610. DOI: 10.1109/TASE.2019.2938219.
- [37] WANG W, MUNRO D, WANG C C, et al. Space-time topology optimization for additive manufacturing[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2020, 61(1):1-18.
- [38] HUANG Y, ZHANG J, HU X, et al. Framefab: Robotic fabrication of frame shapes[J]. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2016, 35(6):1-11.
- [39] BENDSØE M P, KIKUCHI N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1988, 71(2):197-224.
- [40] MAXWELL J C. Solutions of problems[J]. Cambridge Dublin Math. J., 1854, 8:188-195.
- [41] MICHELL A G M. Lviii. the limits of economy of material in frame-structures[J]. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1904, 8 (47):589-597.
- [42] DORN W S, GOMORY R E, GREENBERG H. Automatic design of optimal structures[C]// Automatic design of optimal structures. 1964.
- [43] COX H L. The design of structures of least weight[M]. oxford: pergamon, 1965.
- [44] HEGEMIER G, PRAGER W. On michell trusses[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 1969, 11(2):209-215.

- [45] HEMP W S. Theory of structural design[J]. 1958.
- [46] ROZVANY G I N. Some shortcomings in michell's truss theory[J]. Structural optimization, 1996, 12:244-250.
- [47] ROZVANY G. Partial relaxation of the orthogonality requirement for classical michell trusses [J]. Structural optimization, 1997, 13(4):271-274.
- [48] 程耿东. 关于桁架结构拓扑优化中的奇异最优解[D]. 2000.
- [49] TENEK L H, HAGIWARA I. Optimal rectangular plate and shallow shell topologies using thickness distribution or homogenization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, 115(1):111-124.
- [50] MLEJNEK H P, SCHIRRMACHER R. An engineer's approach to optimal material distribution and shape finding[J]. Computer methods in applied mechanics and engineering, 1993, 106(1-2):1-26.
- [51] XIE Y M, STEVEN G P. A simple evolutionary procedure for structural optimization[J]. Computers & structures, 1993, 49(5):885-896.
- [52] YANG X, XIE Y, STEVEN G, et al. Topology optimization for frequencies using an evolutionary method[J]. Journal of Structural Engineering, 1999, 125(12):1432-1438.
- [53] OSHER S, SETHIAN J A. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations[J]. Journal of computational physics, 1988, 79(1):12-49.
- [54] YUNKANG S, DEQING Y. A new method for structural topological optimization based on the concept of independent continuous variables and smooth model[J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 14(2):179-185.
- [55] ROZVANY G I, ZHOU M, BIRKER T. Generalized shape optimization without homogenization[J]. Structural optimization, 1992, 4(3-4):250-252.
- [56] STOLPE M, SVANBERG K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization[J]. Structural and Multidisciplinary Optimization, 2001, 22(2):116-124.
- [57] 夏天翔, 姚卫星. 连续体结构拓扑优化方法评述[D]. 2011.
- [58] 周克民, 李俊峰, 李霞. 结构拓扑优化研究方法综述[J]. 力学进展, 2005, 1.
- [59] FLEURY C. Conlin: an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts[J]. Structural optimization, 1989, 1(2):81-89.
- [60] SVANBERG K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization[J]. International journal for numerical methods in engineering, 1987, 24(2):359-373.
- [61] ZILLOBER C. A globally convergent version of the method of moving asymptotes[J]. Structural optimization, 1993, 6(3):166-174.

- [62] BOGGS P T, TOLLE J W. Sequential quadratic programming[J]. *Acta numerica*, 1995, 4: 1-51.
- [63] ALIZADEH F, HAEBERLY J P A, OVERTON M L. Primal-dual interior-point methods for semidefinite programming: convergence rates, stability and numerical results[J]. *SIAM Journal on Optimization*, 1998, 8(3):746-768.
- [64] CHOW G C. *Dynamic economics: optimization by the lagrange method*[M]. Oxford University Press, 1997.
- [65] WHITLEY D. A genetic algorithm tutorial[J]. *Statistics and computing*, 1994, 4(2):65-85.
- [66] VAN LAARHOVEN P J, AARTS E H. *Simulated annealing*[M]. Springer, 1987: 7-15.
- [67] BOHIDAR S K, SHARMA R, MISHRA P R. Functionally graded materials: A critical review [J]. *International Journal of Research*, 2014, 1(4):289-301.
- [68] GARNER E, KOLKEN H M, WANG C C, et al. Compatibility in microstructural optimization for additive manufacturing[J]. *Additive Manufacturing*, 2019, 26:65-75.
- [69] COLLET M, NOËL L, BRUGGI M, et al. Topology optimization for microstructural design under stress constraints[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2018, 58(6):2677-2695.
- [70] ZOBAER S T, SUTRADHAR A. An energy-based method for interface connectivity of incompatible microstructures through parametric modeling[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 370:113278.
- [71] ZHOU X Y, DU Z, KIM H A. A level set shape metamorphosis with mechanical constraints for geometrically graded microstructures[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2019, 60(1):1-16.
- [72] DENG J, PEDERSEN C B, CHEN W. Connected morphable components-based multiscale topology optimization[J]. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 2019, 14(2):129-140.
- [73] DU Z, ZHOU X Y, PICELLI R, et al. Connecting microstructures for multiscale topology optimization with connectivity index constraints[J]. *Journal of Mechanical Design*, 2018, 140(11).
- [74] WU J, SIGMUND O, GROEN J P. Topology optimization of multi-scale structures: a review [J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2021:1-26.
- [75] ORTMANN C, SCHUMACHER A. Graph and heuristic based topology optimization of crash loaded structures[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 47(6):839-854.
- [76] CHOUGRANI L, PERNOT J P, VÉRON P, et al. Lattice structure lightweight triangulation for additive manufacturing[J]. *Computer-Aided Design*, 2017, 90:95-104.
- [77] ALMEIDA S R, PAULINO G H, SILVA E C. Layout and material gradation in topology

- optimization of functionally graded structures: a global–local approach[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 42(6):855-868.
- [78] WU J, AAGE N, WESTERMANN R, et al. Infill optimization for additive manufacturing—approaching bone-like porous structures[J]. *IEEE transactions on visualization and computer graphics*, 2017, 24(2):1127-1140.
- [79] LIU H, YANG D, HAO P, et al. Isogeometric analysis based topology optimization design with global stress constraint[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 342:625-652.
- [80] TAKEZAWA A, NISHIWAKI S, KITAMURA M. Shape and topology optimization based on the phase field method and sensitivity analysis[J]. *Journal of Computational Physics*, 2010, 229(7):2697-2718.
- [81] SUZUKI K, KIKUCHI N. A homogenization method for shape and topology optimization [J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1991, 93(3):291-318.
- [82] ZHOU M, ROZVANY G. The coc algorithm, part ii: Topological, geometrical and generalized shape optimization[J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1991, 89(1-3):309-336.
- [83] SIGMUND O, PETERSSON J. Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima[J]. *Structural optimization*, 1998, 16(1):68-75.
- [84] DIAZ A, SIGMUND O. Checkerboard patterns in layout optimization[J]. *Structural optimization*, 1995, 10(1):40-45.
- [85] HABER R B, JOG C S, BENDSØE M P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter[J]. *Structural optimization*, 1996, 11(1):1-12.
- [86] PETERSSON J, SIGMUND O. Slope constrained topology optimization[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 41(8):1417-1434.
- [87] JOG C S, HABER R B. Stability of finite element models for distributed-parameter optimization and topology design[J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1996, 130(3-4):203-226.
- [88] DÍAAZ A R, KIKUCHI N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization problems using a homogenization method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1992, 35(7):1487-1502.
- [89] LE C, NORATO J, BRUNS T, et al. Stress-based topology optimization for continua[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2010, 41(4):605-620.
- [90] HOLMBERG E, TORSTENFELT B, KLARBRING A. Stress constrained topology optimization[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2013, 48(1):33-47.

- [91] DUYSINX P, SIGMUND O. New developments in handling stress constraints in optimal material distribution[C]//7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium on multidisciplinary analysis and optimization. 1998: 4906.
- [92] YANG R, CHEN C. Stress-based topology optimization[J]. *Structural optimization*, 1996, 12(2-3):98-105.
- [93] RONG J H, XIAO T T, YU L H, et al. Continuum structural topological optimizations with stress constraints based on an active constraint technique[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, 108(4):326-360.
- [94] BERTSEKAS D P. *Constrained optimization and lagrange multiplier methods*[M]. Academic press, 2014.
- [95] ROCKAFELLAR R. New applications of duality in convex programming[C]//Proceedings of the 4th Conference of Probability, Brasov, Romania. 1971: 73-81.
- [96] BUYS J. *Dual algorithms for constrained optimization*[J]. These de doctorat, Rijksuniversiteit te Leiden, Leiden, The Netherlands, 1972.
- [97] XIA Q, SHI T, LIU S, et al. A level set solution to the stress-based structural shape and topology optimization[J]. *Computers & Structures*, 2012, 90:55-64.
- [98] SENHORA F V, GIRALDO-LONDONO O, MENEZES I F, et al. Topology optimization with local stress constraints: a stress aggregation-free approach[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2020, 62(4):1639-1668.
- [99] ECKSTEIN J, BERTSEKAS D P. On the douglas—rachford splitting method and the proximal point algorithm for maximal monotone operators[J]. *Mathematical Programming*, 1992, 55(1):293-318.
- [100] SVED G, GINOS Z. Structural optimization under multiple loading[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1968, 10(10):803-805.
- [101] KIRSCH U. Optimal topologies of truss structures[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1989, 72(1):15-28.
- [102] ROZVANY G. On design-dependent constraints and singular topologies[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2001, 21(2):164-172.
- [103] ACHTZIGER W, KANZOW C. Mathematical programs with vanishing constraints: optimality conditions and constraint qualifications[J]. *Mathematical Programming*, 2008, 114(1):69-99.
- [104] CHENG G, GUO X. ε -relaxed approach in structural topology optimization[J]. *Structural optimization*, 1997, 13(4):258-266.
- [105] GUEST J K, PRÉVOST J H, BELYTSCHKO T. Achieving minimum length scale in topology optimization using nodal design variables and projection functions[J/OL]. *International*

- journal for numerical methods in engineering, 2004, 61(2):238-254. DOI: 10.1088/1757-899X/562/1/012030.
- [106] WANG F, LAZAROV B S, SIGMUND O. On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization[J/OL]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2011, 43(6):767-784. DOI: 10.1007/s00158-010-0602-y.
- [107] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J/OL]. *Foundations and Trends® in Machine learning*, 2011, 3(1):1-122. DOI: 10.1561/22000000016.
- [108] HASHIN Z, SHTRIKMAN S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1963, 11(2): 127-140.
- [109] XIA L, BREITKOPF P. Design of materials using topology optimization and energy-based homogenization approach in matlab[J]. *Structural and multidisciplinary optimization*, 2015, 52(6):1229-1241.
- [110] 刘利刚, 徐文鹏, 王伟明, 等. 3D 打印中的几何计算研究进展[D]. 2015.
- [111] 胡瑞珍, 惠黄. 3D 打印启发下的模型实例化优化研究综述[D]. 2015.
- [112] PARK S, CHOI B. Tool-path planning for direction-parallel area milling[J/OL]. *Computer-Aided Design*, 2000, 32(1):17 - 25. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448599000809>. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0010-4485\(99\)00080-9](https://doi.org/10.1016/S0010-4485(99)00080-9).
- [113] RAJAN V, SRINIVASAN V, TARABANIS K A. The optimal zigzag direction for filling a two-dimensional region[J/OL]. *Rapid Prototyping Journal*, 2001, 7(5):231-241. <https://doi.org/10.1108/13552540110410431>.
- [114] KIM H C. Tool path generation and modification for constant cutting forces in direction parallel milling[J/OL]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2011, 52(9):937-947. <https://doi.org/10.1007/s00170-010-2790-4>.
- [115] JIN Y A, HE Y, XUE G H, et al. A parallel-based path generation method for fused deposition modeling[J]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2015, 77(5-8):927-937.
- [116] FAROUKI R, KOENIG T, TARABANIS K, et al. Path planning with offset curves for layered fabrication processes[J/OL]. *Journal of Manufacturing Systems*, 1995, 14(5): 355 - 368. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0278612595988724>. DOI: [https://doi.org/10.1016/0278-6125\(95\)98872-4](https://doi.org/10.1016/0278-6125(95)98872-4).
- [117] YANG Y, LOH H, FUH J, et al. Equidistant path generation for improving scanning efficiency in layered manufacturing[J/OL]. *Rapid Prototyping Journal*, 2002, 8(1):30-37. <https://doi.org/10.1108/13552540210413284>.

- [118] ABDULLAH H, RAMLI R , WAHAB D A. Tool path length optimization of contour parallel milling based on modified ant colony optimization[J/OL]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2017, 92(1):1263-1276. <https://doi.org/10.1007/s00170-017-0193-5>.
- [119] KUIPERS T, DOUBROVSKI E L, WU J, et al. A framework for adaptive width control of dense contour-parallel toolpaths in fused deposition modeling[J]. *Computer-Aided Design*, 2020, 128:102907.
- [120] NAIR S H, SINHA A, VACHHANI L. Hilbert's space-filling curve for regions with holes [J/OL]. *CoRR*, 2017, abs/1709.02938. <http://arxiv.org/abs/1709.02938>.
- [121] FLEMING C, WALKER S, BRANYAN C, et al. Toolpath planning for continuous extrusion additive manufacturing[J]. 2017.
- [122] HELD M, SPIELBERGER C. A smooth spiral tool path for high speed machining of 2d pockets[J/OL]. *Computer-Aided Design*, 2009, 41(7):539 - 550. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010448509001031>. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cad.2009.04.002>.
- [123] HELD M, SPIELBERGER C. Improved spiral high-speed machining of multiply-connected pockets[J]. *Computer-Aided Design and Applications*, 2014, 11(3):346-357.
- [124] CHEN Z, SHEN Z, GUO J, et al. Line drawing for 3d printing[J]. *Computers & Graphics*, 2017, 66:85-92.
- [125] JIN G, LI W, GAO L. An adaptive process planning approach of rapid prototyping and manufacturing[J]. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2013, 29(1):23-38.
- [126] DING D, PAN Z S, CUIURI D, et al. A tool-path generation strategy for wire and arc additive manufacturing[J/OL]. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2014, 73(1):173-183. <https://doi.org/10.1007/s00170-014-5808-5>.
- [127] OZBOLAT I T, KHODA A. Design of a new parametric path plan for additive manufacturing of hollow porous structures with functionally graded materials[J]. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, 2014, 14(4):041005.
- [128] MANDELBROT B B. Stochastic models for the earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands[J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 1975, 72(10):3825-3828.
- [129] MANDELBROT B B. On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1975, 72(3):401-416.
- [130] MANDELBROT B B, MANDELBROT B B. *The fractal geometry of nature: volume 1*[M]. WH freeman New York, 1982.
- [131] BARNSELY M F, DEVANEY R L, MANDELBROT B B, et al. *The science of fractal images* [M]. Springer, 1988.

- [132] JOHNSON A. Clipper - an open source freeware library for clipping and offsetting lines and polygons[Z]. 2010.
- [133] BLOOMENTHAL J, WYVILL B. Introduction to implicit surfaces[M]. San Francisco, CA, USA: Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1997.
- [134] MURAKI S. Volumetric shape description of range data using “blobby model” [J/OL]. SIGGRAPH Comput. Graph., 1991, 25(4):227-235. <http://doi.acm.org/10.1145/127719.122743>.
- [135] SONG X, CHEN F. Adaptive surface reconstruction based on tensor product algebraic splines [J]. Numerical Mathematics Theory Methods and Applications, 2009, 2(1):90-99.
- [136] LLOYD S. Least squares quantization in pcm[J/OL]. IEEE Transactions on Information Theory, 1982, 28(2):129-137. DOI: 10.1109/TIT.1982.1056489.
- [137] SONG Y, YANG Z, LIU Y, et al. Function representation based slicer for 3d printing[J]. Computer Aided Geometric Design, 2018, 62:276-293.
- [138] YANG H, ZHANG S. Numerical simulation of temperature field and stress field in fused deposition modeling[J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2018, 32(7):3337-3344.

致 谢

岁月蹉跎，白驹过隙。硕博之行感悟良多。我曾经反复质问我读博的意义，如今在博士生活接近尾声的时候终于给了自己一个满意的解答，那便是对自我和科学的探索。硕博六年，我在两座城市辗转。科大的生活教会了我如何耐得住寂寞脚踏实地搞科研；代尔夫特的氛围更适合灵感的激发与自由探索。两种教育体系，我把它归结为苦行僧的修行和意识流的思考。毫无疑问，这两者都是科研的必备的条件。一路走来，我幸运地遇到了良师益友和知己玩伴。在博士论文完成之际，想对他们表示最衷心的感谢。

一、感谢恩师。

首先感谢我的导师陈发来老师。感谢陈老师在我博士初期最迷茫最困惑的时候收我做他的学生。就这样我带着对几何知识的自以为是和倔强开始了我的博士生涯。然而越往前走，越发现自己的愚钝。芝诺有一个著名的比喻，说人的知识好像一个圆圈，知识越多，圆圈的周长越长，就会发现自己越无知。我用亲身经历证实了这个比喻，于我往往是走了一段时间回头看才发现自己是在老师面前“班门弄斧”。然而陈老师会耐心的告诉我科研一定要脚踏实地，慢工出细活。我这一路走来，陈老师给予我太多太多。虽然于他或许是举手之劳，但是足以改变我的人生。另外我也想感谢刘利刚老师提供科研的国际化视野，引领我进入计算机图形学的世界。感谢 GCL 实验室的各位老师对我科研道路上的指点与帮助。

感谢祖国给我提供了海外留学的机会。感谢我的国外导师吴俊老师，亦师亦友。与他每次讨论都让我获益匪浅。吴老师给我提供了一个青年科研工作者的视角，带我走进结构优化的大门，帮助我融入结构优化的科研圈。我的科研之路，从此变得更加宽阔。从问题产生到如何解决，吴老师循循善诱启发我不断思考最后解决问题。让我看到科研的过程是有迹可循的，让我觉得做科研是一件非常神圣又很有成就感的事情。吴老师的每次鼓励，都会给我莫大的动力。现在的我，对科研不仅仅是敬畏，更是一种期待！

感谢科大全媒体中心的同事，曾皓老师和姚琼老师。全媒体中心是我科研之余的一个情绪出口。在这里，我从不同的视角看到了不一样的科大。这里有一群与众不同的小伙伴在做一些特别的事情。在这里，我跟摄影部的小伙伴学习摄影技巧，跟文艺部的同学分享书单，结识了各个领域的朋友给我平淡的博士生活增添了不一样的色彩。

感谢从小到大一路走来遇到的老师，毛玉珍老师，王海霞老师，巩文彩老师，黄稚新老师，她们是我在不同学习阶段遇到的贵人。你们的谆谆教诲我必铭

记在心。

二，感谢挚友。

感谢 GCL 实验室的朋友，杨阳。她陪伴了我博士生涯的大部分时光。忙碌的学习生活因为有她的陪伴变得有滋有味。我们是并肩战斗的战友，这样的友情坚不可摧。感谢其他实验室的同学们对我生活和学业上的关照。

短短不到两年的留学之旅，对我来说是一场思想解放运动。感谢代尔夫特理工大学的朋友，姚新荷，郜颖颖，陈振宇，周宏鹏，杨雨生。我们是互相守望的一行人。我们一起旅行，一起思考，一起讨论学术。谈天说地，志趣相投。当你们决定继续在科研界打拼的时候，我因跟你们在同一个圈子而感到无比骄傲。同时也感谢龚勋，严迪，周云中，俞策皓我们一起做头脑风暴，建立系统的知识体系。晦涩难懂的科研问题被你们生动的解说出来的画面让我至今难忘。他们丰富的人生阅历给我提供了更多看世界的角度，消除了我的偏见，开阔了我的思维。让我看到了这个世界更多的可能性，我的世界因为有她们变得五彩斑斓。

感谢从小到大陪伴我的朋友，王婧，石兰君，李莉，杨琳。她们是我漫长岁月里的调味剂和坚强的情感后盾。我们互诉衷肠，她们的安慰鼓励使我对未来充满勇气。感谢我的本科舍友，张雅倩和郭晓洁。她们是我远方的精神支柱，虽然分散各地经历不一样的人生，但是我们有心有灵犀的默契。

三，感谢家人。

我生在了一个幸福开明的家庭。我的妈妈是我人生中第一位老师。她认真负责积极上进。这样的生活态度至今也深深影响了我。我的爸爸豁达博学，他告诉我按照自己的意愿过一生。这在我困顿迷茫的时期给我莫大的鼓励。感谢我的爸爸妈妈给予我无私的爱，支持与尊重。你们永远是我前进道路上最大的动力。感谢我的男朋友张巢同学默默陪伴我十年的时光。我深知陪伴是最长情的告白，一切尽在不言中。

最后，我想感谢自己。感谢在遇到挫折依旧不懈努力的自己，感谢耐得住寂寞学会独处的自己，感谢充满勇气无畏的自己，感谢乐观开朗的自己。我坚信，未来可期！我也深知多少博士的毕业之路，都是挥洒了无数汗水才得以完成的艰难修行。在此向所有取得博士学位和正在读博士的前辈和同学致敬！

翟晓雅

2021 年 4 月 5 日

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

已发表论文

1. 翟晓雅, 陈发来. 分形模型的 3D 打印路径规划 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2018, 30(6): 1123-1135.
2. Zhai Xiaoya, Chen Falai. Path Planning of a Type of Porous Structures for Additive Manufacturing[J]. Computer-Aided Design, 2019, 115: 218-230.
3. Zhai Xiaoya, Chen Falai, Wu Jun. Alternating Optimization of Design and Stress for Stress-Constrained Topology Optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization.(accepted)

待发表论文

1. Zhai Xiaoya, Wang Weiming, Chen Falai, Wu Jun. Topology Optimization of Differentiable Microstructures.
2. Zhai Xiaoya, Chen Falai. Alternating Optimization Algorithm for Isogeometric Topology Optimization with Stress Constraints.
3. Chen Zhenyu, Zhai Xiaoya, Lin Zhongwei. Dynamic Wind Turbine Wake Reconstruction:A Koopman-linear Flow Estimator.

研究报告

1. Topology optimization of differentiable microstructures 长摘要被 14th World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization 录用。
2. Alternating Optimization of Design and Stress for Stress-Constrained Topology Optimization poster 被 Symposium on Solid and Physical Modeling 2020 录用。
3. 分形模型的 3D 打印路径规划长摘要被 2017 全国几何设计与计算录用。